UNA EXPERIENCIA DIDÁCTICA CON INCIDENCIA EN LA INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS CINEMÁTICAS

Crisólogo Dolores Flores*
Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) de la UAGro
Chilpancingo, Gro. México.
cdolores2@gmail.com

Martha Iris Rivera López**
Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) de la UAGro
Chilpancingo, Gro. México.
caneiris_037@hotmail.com

Yanet Tejada Mayo***
Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) de la UAGro
Chilpancingo, Gro. México.
ytejada05@gmail.com

Recibido: 01/03/2016 Aceptado: 14/08/2016

* Doctor en Ciencias con Especialidad en Metodología de la Enseñanza de la Matemática por el Instituto Superior Pedagógico “Enrique J. Varona” de La Habana, Cuba. Trabaja en el Doctorado y Maestría del Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Trabaja en la línea de investigación relativa al Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

** Maestra en Ciencias Área Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero. Es profesora de matemáticas del Nivel Medio Superior y trabaja en la línea de investigación orientada hacia la lectura e interpretación de gráfica en el marco de los Estudios del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

*** Maestra en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero. Profesora de matemáticas del Nivel Medio Superior y trabaja en la línea de investigación orientada hacia al desarrollo de la visualización en el marco de los Estudios del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

Resumen

Este artículo da cuenta de una investigación realizada con el objetivo de estudiar la habilidad de interpretación de gráficas cinemáticas. Para alcanzarlo se utilizó el método de investigación-acción, sobre la base del cual, se diseñó, aplicó y evaluó, una secuencia de aprendizaje orientada por el enfoque del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Las acciones de interpretación de gráficas estudiadas fueron de dos tipos: locales y globales. Las primeras se centraron en la extracción de datos específicos de velocidad y aceleración, las segundas se refieren al comportamiento global de las gráficas de tales funciones y sus relaciones entre sí. Los resultados obtenidos fueron valorados mediante el método pre-post test, comparando sus interpretaciones al inicio y al final de la aplicación de la secuencia de aprendizaje. Los resultados indican que los estudiantes son capaces de interpretar las propiedades locales de las gráficas, no así de sus propiedades globales, además se notó la preferencia de los estudiantes por utilizar las fórmulas de las funciones o de sus derivadas en lugar de la información variacional subyacente en las gráficas.

Palabras clave:

Interpretación- Gráficas Cinemáticas - Pensamiento Variacional - Método Pre-post test - Matemática Educativa.

Abstract

This article reports on research conducted with the aim of studying the ability of interpretation of graphs kinematics. To achieve the objective, we use the method of action research, on the basis of which it was designed, implemented and evaluated, a sequence of learning oriented approach under the development of thinking and variational language. The actions for the interpretation of graphs studied were of two types: local and global. The first focused on extracting specific data speed and acceleration, the latter refers to the overall behavior of the graphs of these functions and their relationships with each other. The results were assessed by pre-post method, comparing their performances at the beginning and end of the application of the learning sequence. The results indicate that the students are able to interpret the local properties of graphs not its global properties, furthermore the preference of students was noted for using formulas functions or their derivatives rather than the variational information underlying in graphs to interpret their behavior.

Keywords:

Interpretation - Kinematics Graphs - Variational Thinking - Pre-post Method - Mathematics Education.

Antecedentes

Esta investigación se enmarca en la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PLV). En ella se estudian los procesos y fenómenos asociados a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática de la variación y el cambio (Cantoral y Farfán, 2000). El PLV precisa entre otras cosas del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende (Cantoral y Farfán, 1998). Este trabajo tiene como objetivo estudiar la habilidad de interpretación de gráficas cinemáticas en virtud de que, justamente, son ideales en la representación de los fenómenos de variación y cambio físico. Estos procesos son de suma importancia hoy día (Glazer, 2011; Luna, 2004; Roth y Bowen, 2003; Urban, 2015), debido a las exigencias de la sociedad actual y de la educación, ámbitos en los cuales se exige analizar y comunicar información de manera más simple o bien utilizarlas como medios para propiciar el aprendizaje de las ciencias.

En Educación Matemática y en la Física, hoy día se asume que la lectura e interpretación de las gráficas puede estimular los procesos cognitivos para procesar información y ayudar a comprender fenómenos de variación y cambio. Sin embargo, la interpretación de gráficas es una actividad compleja y desafiante así lo afirman Monteiro y Ainley (2004) y Glazer (2011), ya que muchos alumnos están familiarizados con gráficas, las pueden construir, pueden manipularlas con razonable exactitud, pero son incapaces de interpretar las características globales de la información contenida en ellas (Tairab y Khalaf Al-Naqbi, 2004). Luna (2004) y Urban (2015) consideran que el desarrollar la habilidad de lectura e interpretación de gráficas que representan el movimiento de un objeto, trae como consecuencia la capacidad de interpretar gráficas con otros parámetros.

Las investigaciones en Educación Matemática y en Física Educativa han reportado dificultades y errores de los estudiantes al trabajar con gráficas cinemáticas, por ejemplo, Beichner, (1994); Dolores, Alarcón y Albarran, (2002); McDermott, Rosenquist y Van Zee (1987); Pérez y Dibar, (2012); Tairab y Khalaf Al-Naqbi (2004); Tejeda (2009). En estos trabajos se ha encontrado: a) una asociación entre velocidad media con la representación gráfica de la distancia (ordenada); b) asociación entre la gráfica cartesiana con la trayectoria física del movimiento representado; c) la no aceptación de que una gráfica de coordenadas tiempo-distancia y otra de coordenadas velocidad-tiempo puedan representar al mismo movimiento; d) indistinción entre velocidad media y velocidad instantánea y; e) indistinción entre el uso de pendiente negativa o positiva como una razón de cambio.

Tejeda (2009) observó problemas en estudiantes novicios de Física de Nivel Superior al trabajar en la representación algebraica, entre ellos: a) el despeje de ecuaciones, por ejemplo, si tiene $v = d/t$, entonces dicen que $d = v/t$; b) falta de comprensión del término “cambio de velocidad”, aquí el estudiante no distingue que Δv indica la diferencia de velocidades y no de una velocidad determinada, pues ellos interpretan la ecuación $a = \Delta v/\Delta t$, como $a = v/t$; c) tendencia a elegir opciones donde utilicen más el Cálculo Diferencial que el Integral. En cambio Pérez y Dibar (2012), encuentran que los estudiantes frente a problemas de velocidad y aceleración, recurren más al trabajo numérico, usando tablas y ecuaciones, donde el uso de las ecuaciones impide dar explicaciones en lenguaje común, lo cual orilla a evadir la conexión con una imagen mental del movimiento o con un gráfico dado. La representación gráfica de la posición la realizan de manera correcta mediante una tabla o una función, pero no así cuando se trata de transitar en la representación gráfica-gráfica.

Urban (2015) introdujo el uso de datos de situaciones reales y de la tecnología, para mostrar las principales funciones de movimientos de forma interactiva y así visualizar relaciones y patrones. Utilizó sensores de movimientos en combinación con la calculadora TI-Nspire CX CAS™. Esto le permitió recoger datos físicos y obtener inmediatamente la gráfica en tiempo real, dejando ver así como el movimiento se ve a través de una gráfica posición-tiempo o como una gráfica de velocidad-tiempo, descubriendo así la relación entre la gráfica de posición-tiempo y velocidad-tiempo, además de explorar la gráfica de aceleración-tiempo. Sus resultados fueron favorables, dado que los estudiantes exploraron la solución de los problemas y examinaron el significado de pendiente y razón de cambio, lo cual posibilitó la lectura, comprensión e interpretación de gráficas cinemáticas.

En otras investigaciones encontramos: a) una metodología para desarrollar la habilidad en la elaboración e interpretación de gráficas cinemáticas, fundamentada en la teoría de Vygotsky y las etapas mentales de Galperin (Luna, 2004) y, b) una actividad tutorial que permitió la comprensión de gráficas cinemáticas (Tejeda, 2009) apoyada en los trabajos de Beichner (1994) y centradas en el concepto de pendiente y área bajo la curva. Por su parte Vrancken y Engler (2014) diseñaron una secuencia didáctica para el tratamiento y conversión de registros (numérico, gráfico, analítico y verbal) en el contexto cinemático. Sus resultados (reportan), fueron favorables ya que los alumnos utilizaron varias ideas, estrategias y procedimientos del pensamiento variacional que mejoraron su comprensión sobre la variación. En esta misma dirección, nosotros nos propusimos en este trabajo estudiar la interpretación de gráficas cinemáticas, interviniendo en el proceso didáctico mediante la puesta en práctica de una secuencia de aprendizaje. Esta consiste de actividades de variación y cambio, diseñadas para realizarse con lápiz y papel, en las condiciones de un salón de clase ordinario de la provincia mexicana.

Marco Conceptual

Hay dos formas clásicas de entender la graficación en la escuela señalan Cantoral y Montiel (2001, p.13). En una se asume como una técnica o conjunto de técnicas para bosquejar la gráfica de una función, y otra menos difundida, que entiende la graficación como una forma de interpretar el sentido y significado de sus propiedades desde una perspectiva cognoscitiva. En este trabajo nos interesa principalmente esta segunda forma. Interpretar es dar o atribuir un significado determinado. En el sentido ausbeliano el significado consiste en establecer relaciones funcionales entre la estructura cognoscitiva del estudiante y el conocimiento nuevo, dar un significado consiste en asociar a signos, símbolos o gráficos una idea o un concepto ya existente en la mente del estudiante, por lo que el significado es personal. Sin embargo por convención, el significado debe ser igual para todos para poder realizar una comunicación óptima, y en este sentido la educación procura generar significados que se compartan en las ciencias, artes y humanidades, para así mejorar la comunicación y el aprendizaje.

La interpretación se refiere a las habilidades para leer una gráfica tanto local como globalmente y darle sentido o significado (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990). Lo local se refiere a la extracción de datos específicos de la gráfica y lo global se refiere a determinación de los comportamientos y tendencias de las gráficas. Se entiende por habilidades, como aquella sistematización de acciones que tienen un objetivo o fin consciente (Brito, 1984). Wainer (1992) identificó tres niveles de procesamiento de la información en la interpretación de gráficas: elemental, intermedio y alto. El elemental implica la extracción de datos o lectura de puntos aislados, por ejemplo, quién alcanzó las más alta calificación de un grupo; el nivel intermedio que requiere de la detección de tendencias, por ejemplo, entre 1990 y 1993 qué compañía tuvo la razón más grande de crecimiento, y el nivel alto, requiere de una comprensión más profunda de la estructura de los datos y su comportamiento, por ejemplo las muchachas crecen más rápido que los muchachos. Para explicar nuestros resultados utilizamos el marco general sugerido por Wainer (1992), el cual fue ampliado y enfocado a las acciones específicas que se requieren para interpretar gráficas cinemáticas. Estas acciones se describen en la Tabla 1.

Tabla 1. Niveles y acciones para la interpretación de gráficas

Elemental	Intermedio	Alto
Identificar variables y ejes correspondientes.	Relacionar las pendientes de tangentes con la velocidad y la aceleración.	Estimar la velocidad en un intervalo dada la aceleración. Relación de reversibilidad cifrada en el Teorema Fundamental del Cálculo.
Representar cambios: Δs, Δv y Δt.	Identificar intervalos de velocidad negativa, cero y constante.	Relacionar y explicar el comportamiento global de las gráficas de distancia, velocidad y aceleración.
	Estimar velocidad o aceleración puntual por medio de tangentes.	Esbozar y argumentar su relación entre la gráfica de velocidad y aceleración dada la gráfica de distancia.

Método

En este trabajo utilizamos el método de investigación-acción creado por Lewin (1973). Lo define como un proceso cíclico de exploración, actuación y valoración de resultados. Este método es utilizado para la intervención en la práctica profesional con el fin de ocasionar una mejora. Latorre (2010, p. 23) lo concibe como una amplia gama de estrategias para mejorar el sistema educativo y social. Este método fue elegido porque posibilita observar y ponderar los aprendizajes sobre la base de intervenciones en el aula por parte del profesorado. Las fases del método son: problematización, diagnóstico, diseño de la propuesta, aplicación de la propuesta y evaluación.

Problemática

Las gráficas son herramientas poderosas y uno de los sistemas simbólicos más simples para integrar información sobre la relación entre dos o más variables (Parmar y Signer, 2005; Tairab y Khalaf Al-Naqbi, 2004), sin embargo las dificultades que algunos estudiantes tienen para leer e interpretar gráficas, en particular las gráficas en las que una variable depende del tiempo (Luna, 2004; Urban, 2015) limita el potencial de dicho recurso. McDermott et al. (1987) lo atribuyen a la inexistencia de conexiones entre una representación gráfica y la materia objeto que representa. Beichner (1994) plantea que la interpretación de las gráficas, posición–tiempo (x - t) y velocidad-tiempo (v - t), no son tan evidentes como pudiera parecer, pues los estudiantes de secundaria tienen problemas para identificar diferencias entre la posición, velocidad y aceleración de un cuerpo en movimiento. Situación que no es ajena en los estudiantes de nivel medio superior y superior. Para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional es necesario comprender los procesos de variación y cambio ligados a los problemas de la Física y estos suelen presentarse con frecuencia a través de gráfica, pero estas no son fáciles de interpretar como ya se señaló anteriormente. Por ello en este trabajo son objeto de tratamiento didáctico con el fin de estudiar su interpretación.

Diagnóstico

Para evaluar el estado inicial de los estudiantes participantes en la investigación, se diseñó y aplicó un cuestionario de diagnóstico (pre-test). Se estructuró de 8 situaciones de variación (S) que se agruparon en dos grupos, las que requieren de interpretación local y las que requieren de interpretación global. Al primer grupo pertenecen las situaciones S1, S2, S3, S5 y S6. En S1 y S2 se requiere estimar velocidades instantáneas en una recta y en una curva. En S3 se pide estimar: velocidad cero, velocidad constante y negativa a la vez. En S5 se pide estimar la aceleración instantánea dada la gráfica de la velocidad. En S6 se trata del proceso inverso, es decir, estimar la velocidad puntual a partir de la gráfica de la aceleración. En el segundo grupo quedan agrupadas las situaciones S4, S7 y S8. En S4 se pide elegir las gráficas que representan la velocidad y la aceleración, dada la gráfica distancia que representa el desplazamiento de un cuerpo en movimiento variado. En la situación S7 se pide identificar, qué gráficas de las dadas, representan la distancia, velocidad y aceleración. En S8 se pide esbozar la gráfica de la velocidad y la de aceleración, dada la gráfica de distancia. Finalmente, el cuestionario fue validado con siete estudiantes de licenciatura en matemáticas ajenos a la investigación, con el fin de fortalecer su confiabilidad.

Diseño de la secuencia

Una secuencia de aprendizaje se asumió en el sentido expresado por Tobón, Pimienta y García (2010, p. 20) y Díaz Barriga (2013), como un conjunto articulado de actividades de aprendizaje y evaluación con la mediación de un docente que buscan la consecución de determinadas metas. En nuestro caso nuestra meta es estudiar la habilidad de interpretación de gráficas cinemáticas. La secuencia de aprendizaje se estructuró en tres tipos de actividades: de apertura, desarrollo y cierre. En las de apertura se busca recordar y reforzar en los estudiantes el trazo de tangentes a curvas y el cálculo de pendientes, para más tarde poder relacionar estas ideas con el cálculo de velocidad y aceleración. En las de desarrollo, se formulan y utilizan las definiciones de velocidad y aceleración en términos de ideas variacionales y se introduce la simbología para calcular los cambios (o incrementos) de distancia, velocidad, aceleración y tiempo (Δs, Δv y Δt). Además, se estiman velocidades instantáneas: nulas, constantes y negativas; así mismo la aceleración puntual y global a partir de la gráfica de velocidad.

Las actividades de cierre tienen doble objetivo, por un lado la ampliación y generalización en relación al comportamiento de las funciones y por el otro, la ejercitación mediante la realización de actividades de interpretación de una amplia y variada gama de gráficas. Respecto del primer objetivo se plantea la obtención de velocidades medias o distancias por medio del cálculo de áreas dada la gráfica de aceleración y velocidad respectivamente; para el segundo objetivo se trabaja con la representación gráfica de las funciones de distancia, velocidad y aceleración y el bosquejo de la gráfica de velocidad y aceleración a partir de la gráfica de la distancia. Las actividades fueron retomadas y modificadas de los trabajos de Beichner (1994), de Dolores et al. (2002) y de Dolores (2013).

Aplicación

La secuencia se llevó a la práctica en un total de 18 sesiones de 50 minutos cada una, seis sesiones por semana. Participaron 6 estudiantes que iniciaban estudios de posgrado en Docencia de la Matemática. Los estudiantes son profesores de matemáticas de los cuales, dos trabajan en secundaria y cuatro de bachillerato, con un promedio de cuatro años de experiencia como docentes de matemáticas. Tres de ellos son ingenieros civiles, dos son licenciados en matemáticas y uno con Normal Superior. Cuatro de los estudiantes habían estudiado Cálculo Diferencial e Integral en sus carreras de licenciatura. La intervención se planteó como objetivo principal el de estudiar el desarrollo de sus habilidades de interpretación de gráficas. Todos los participantes contaron y utilizaron los materiales de referencia y fueron de uso obligado.

La metodología de enseñanza utilizada procuró mantener en actividad continua a los estudiantes utilizando el método de conversación heurística para descubrir y utilizar las propiedades de las gráficas en la interpretación de las mismas, tanto de manera conjunta como individualmente. El papel del investigador fue de guía, los participantes realizaban y discutían las actividades propuestas, posteriormente participaban voluntariamente dando a conocer los resultados, estos eran sometidos a revisión por todo el grupo llegando a consensos y formulaciones. En el trabajo cotidiano se utilizó la evaluación continua detectando errores, aciertos y retroalimentando a los participantes, siempre con intenciones de desarrollar sus cualidades para la interpretación de gráficas.

Evaluación

La valoración de los resultados de la puesta en práctica de la secuencia de aprendizaje se realizó mediante la aplicación del mismo pre-test, ahora como pos-test, aplicado al final. Este tipo de valoración obedece, por un lado, a que el método general de investigación utilizado es de tipo cualitativo con cierta cercanía a los preexperimentos, y por otro lado, se requería de un referente para valorar las habilidades de interpretación. Según Hernández, Fernández-Collado y Baptista (2006), el diseño pre-post test consiste en aplicar una prueba previa al estímulo o tratamiento preexperimental y, después de la intervención se aplica la misma prueba para medir los cambios logrados en las variables. En nuestro caso las variables observadas son aquellas relativas al desarrollo de las habilidades de interpretación de gráficas cinemáticas. Finalmente, para conocer los argumentos sobre la base de los cuales fueron dadas las respuestas, a los participantes se les aplicó una entrevista semiestructurada. Las respuestas y los argumentos fueron extraídos de los instrumentos aplicados y almacenados en Excel de Microsoft Office 2011. Los datos fueron procesados mediante un análisis comparativo, el cual se centró en la valoración cualitativa de las acciones indicadoras de la interpretación de gráficas ya descritas en el marco conceptual.

Análisis de las respuestas al pre y pos-test

S1. Una partícula en movimiento recorre una distancia *s*(*t*) (en metros) en relación al tiempo *t* (en segundos) de acuerdo como se muestra en la Gráfica A. En base a esta situación contesta las preguntas siguientes.

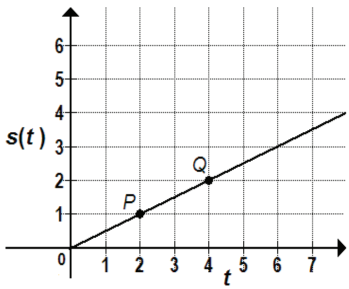
S1A. ¿Cuál es su velocidad en el punto P?

a) 1 *m*/*s* b) 2 *m*/*s* c) 1.5 *m*/*s* d) 0.5 *m*/*s* e) Otra

S1B. ¿Cuál es su velocidad en el punto Q?

a) 2 *m*/*s* b) 1 *m*/*s* c) 4 *m*/*s* d) ½ *m*/*s* e) Otra

Gráfica A



Para S1A, en el pre-test, cinco de los estudiantes contestaron correctamente, mientras que todos lo hacen en el pos-test, la velocidad de la partícula es 0.5 *m/s* (Gráfica 1).

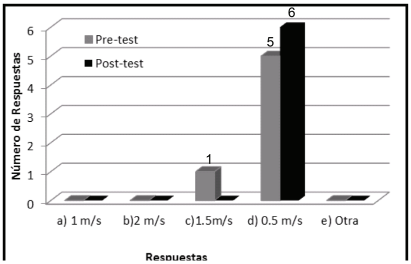
Tabla 2. Acciones realizadas en la S1

Preg.	Pre-test	Pos-test
S1A	• Identifican variables en juego y sus correspondientes ejes. • Cinco estiman la velocidad.	• Representan los cambios Δs y Δt. • Usan $\Delta s/\Delta t$ y estiman la velocidad. • Todos hacen estimaciones.
S1B	• Identifican variables en juego y sus correspondientes ejes. • Todos hacen estimaciones.	• Representan los cambios Δs y Δt. • Usan $\Delta s/\Delta t$ y estiman la velocidad. • Todos hacen estimaciones.

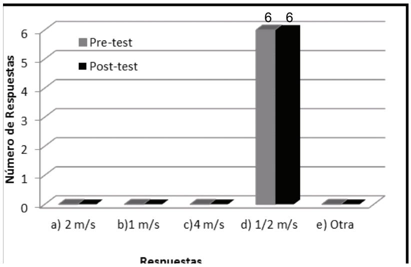
Para S1B todos contestan correctamente en el pre y post-test (Gráfica 2), la velocidad de la partícula es 0.5 *m/s.* Mediante la Tabla 2 se pueden comparar las acciones en el pre y post al respecto.

En S1A, en el pre-test utilizan la fórmula $v = d/t$, en la que dividen la magnitud de la ordenada entre la magnitud de la abscisa, sólo un estudiante utilizó la idea de pendiente en términos de recorridos en *s* entre recorridos en *t*. Mientras que en el post utilizan el cociente $\Delta s/\Delta t$ y argumentan en términos de incrementos, sólo un estudiante insiste con el manejo de las variables "*x*" e "*y*". Para S1B, las acciones son similares a las de S1A en el pre y el post respectivamente. En el pre, sólo un estudiante hace referencia a la gráfica, dice: "como es una recta, entonces la velocidad es constante", mientras que en el pos-test uno utiliza la fórmula $v = (s_2 - s_1)/(t_2 - t_1)$, otro justifica con el argumento: "dado que la razón de cambio es constante, por consecuencia la velocidad también lo es".

Gráfica 1. Respuestas a la pregunta S1A



Gráfica 2. Respuestas a la pregunta S1B



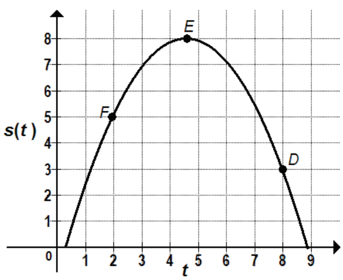
S2. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba, la distancia *s*(*t*) que recorre en *t* segundos se describe la gráfica B. A partir de esta situación contesta las siguientes preguntas.

S2A. ¿Cuál es su velocidad en el punto D?
a) 3 *m/s* b) 8 *m/s* c) −3 *m/s* d) 1/3 *m/s*
e) Otra

S2B. ¿Cuál es su velocidad en el punto E?
a) 8 *m/s* b) 4.5 *m/s* c) 5 *m/s*
d) 0 *m/s* e) Otra

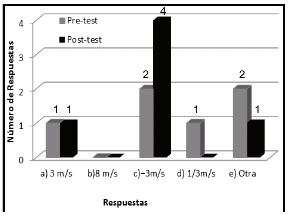
S2C. ¿Cuál es su velocidad en el punto F?
a) 3 *m/s* b) 1/3 *m/s* c) 2 *m/s*
d) 5 *m/s* e) Otra

Gráfica B

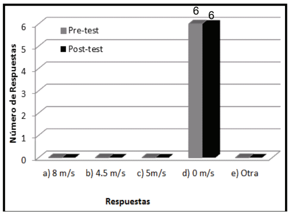


Para S2A, en el pre-test dos estudiantes contestaron correctamente, la velocidad es −3 *m/s*, uno contestó 3 *m/s*, otro 1/3 *m/s* y el resto propuso 3/8 *m/s* a pesar de que ésta no se da como opción, mientras que en el post lo hacen correctamente cuatro estudiantes (Gráfica 3). Para S2B, en el pre y post todos contestan correctamente, la velocidad en el punto E es 0 m/*s* (Gráfica 4). Mientras que en S2C, en el pre, sólo un estudiante contestó correctamente, es decir, la velocidad es 2 *m/s,* dos contestaron 3 *m/s*, otro 1/3 *m/s*, el resto propuso 2.5 *m/s* (respuesta propuesta por ellos). En cambio, en el pos-test cuatro contestaron correctamente, uno contestó que es 1/3 *m/s* y el otro optó por 5 *m/s* (Gráfica 5).

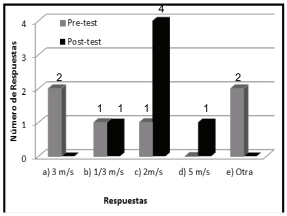
Gráfica 3. Respuestas a la pregunta S2A



Gráfica 4. Respuestas a la pregunta S2B



Gráfica 5. Respuestas a la pregunta S2C



Las acciones de los estudiantes en la realización de la situación S2 aparecen en la Tabla 3.

Tabla 3. Acciones realizadas en la situación S2

Preg.	Pre-test	Pos-test
S2A	• Identifican las variables en los ejes respectivos. • Hacen algunas estimaciones.	• Representan cambios Δs y Δt, y los hacen catetos de triángulos rectángulos. • Trazan tangentes usando los catetos Δs y Δt. • Estiman la pendiente por medio del cociente $v = \Delta s/\Delta t$. • Interpretan la pendiente de tangente como velocidad.
S2B	• La derivada es cero (en el máximo).	• La derivada es cero (“porque no hay cambios”, “ahí alcanza su máximo”).
S2C	• Identifican variables en juego y sus correspondientes ejes.	• Representan los cambios Δs y Δt. • Trazan tangentes usando triángulos rectángulos de catetos Δs y Δt. • Estiman la pendiente por medio del cociente $v = \Delta s/\Delta t$. • Interpretan la pendiente de tangente como velocidad.

En S2A y S2C, se pregunta sobre velocidad puntual (negativa y positiva), en el pre-test la mayoría emplea la fórmula $v = d/t$, dividiendo la magnitud de la ordenada entre la magnitud de la abscisa, es decir las coordenadas de los puntos D y F respectivamente. En cambio, en el post lo hacen por medio de la estimación de la pendiente de la recta tangente, obteniéndola por medio de un triángulo rectángulo con catetos Δs y Δt y el cociente de incrementos. Es notable que a pesar de saber cómo obtener la velocidad puntual auxiliados por la tangente, estos no la asocian a la pendiente de dicha recta. Por ejemplo, para S2A el estudiante EG dice: "Yo lo que hago es trazar tangentes y determino la pendiente de esa tangente en el punto D, el delta *y* es tres y el delta *x* es uno, entonces la velocidad es tres" (Figura 1). En este argumento se nota que el estudiante sabe que puede utilizar el trazo de tangentes para calcular la velocidad, incluso en su argumento hace referencia a la pendiente, sin embargo la pendiente de la recta tangente es negativa y este hecho lo pasa por desapercibido. De manera similar, los estudiantes que respondieron correctamente a esta pregunta, atribuyen la negatividad al hecho de que la curva baja o al decrecimiento de la gráfica, no la atribuyen a la pendiente de la tangente. Este hecho denota la ausencia de conexión entre el signo de la pendiente de la tangente y el comportamiento de sus razones de cambio.

Para S2B, pregunta que se centra en la velocidad nula, en el pre y pos-test la mayoría no hace referencia a ideas variacionales, es decir, a la tendencia de las pendientes de secantes como la pendiente de la tangente en ese punto o a la definición de velocidad como el cociente entre las magnitudes de los cambios de distancia entre los cambios de tiempo. Sólo un estudiante en el pos-test da argumentos basados en la variación, dice: "si tomo dos puntos muy cercanos, el delta *s* se hace muy pequeño y el delta *t* también".

S3. La Gráfica C muestra la variación de la distancia (medida en km) recorrida por un ciclista en función del tiempo *t* (medido en minutos).

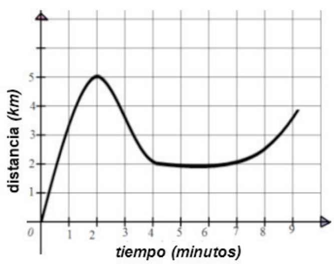
S3A. ¿En qué intervalo su velocidad es cero?

a) $4 < t < 7$ b) $0 < t < 2$ c) $7 < t < 9$ d) $2 < t < 4$

S3B. ¿En qué intervalo la velocidad es constante y negativa?

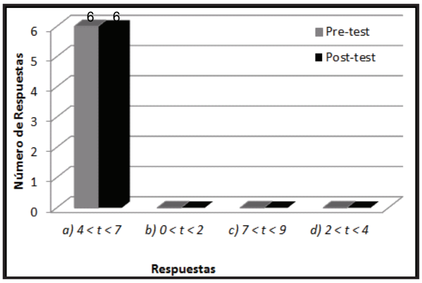
a) $7 < t < 9$ b) $0 < t < 2$ c) $2 < t < 4$ d) $4 < t < 7$

Gráfica C

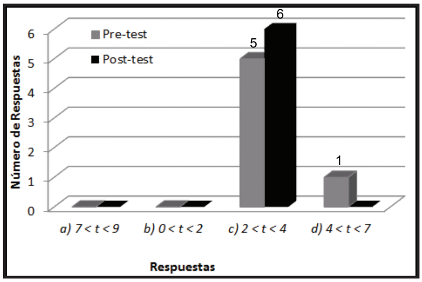


En esta pregunta, en el pre y pos-test todos los estudiantes contestan que la velocidad es cero en el intervalo $4 < t < 7$ (Gráfica 6). En cambio, respecto de S3B, en el pre-test, cinco estudiantes contestan que la velocidad es constante y negativa en el intervalo 2 < *t* < 4 y otro optó por el intervalo de 4 < *t* < 7. En el pos-test todos eligieron el intervalo 2 < *t* < 4 (Gráfica 7).

Gráfica 6. Respuestas a la pregunta S3A



Gráfica 7. Respuestas a la pregunta S3B



Las principales acciones realizadas al contestar estas preguntas se muestran en la Tabla 4.

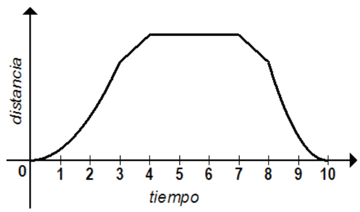
Tabla 4. Acciones realizadas en la situación S3

Preg.	**Acciones**	
	Pre-test	**Pos-test**
S3A	• Identifican variables en juego y sus correspondientes ejes. • Identifican intervalo de velocidad nula.	• Identifican variables en juego y sus correspondientes ejes. • Identifican intervalo de velocidad nula.
S3B	• Identifican variables en juego y sus correspondientes ejes.	• Estiman e identifican dónde la velocidad es constante y negativa.

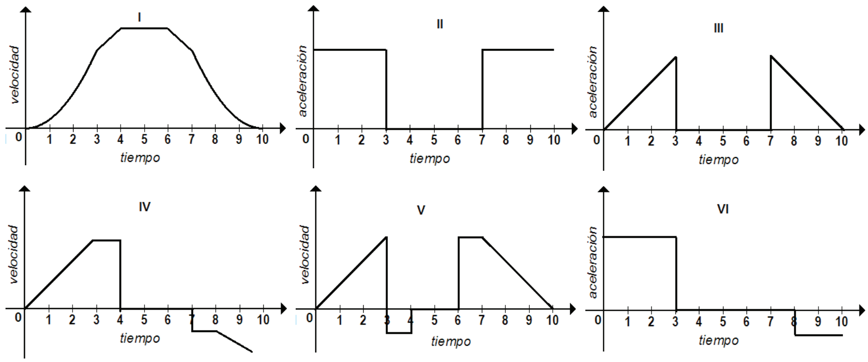
Para la pregunta S3A, las justificaciones fueron similares en el pre y post-test, atribuyen la nulidad a la no variación en la distancia pero sí en tiempo. Sólo se dio un caso en el pos-test en donde la justificación es asociada a la derivada y los cambios, tal como lo esgrime el estudiante EA: "porque si tenemos una función su derivada nos representa la velocidad, entonces como esta es una constante su derivada es cero… de cuatro a siete segundos se puede decir, que se quedó parado porque no avanza nada, la distancia sigue siendo constante… el delta *d* es cero y el delta *t*…” Para S3B (velocidad constante y negativa), en el pre y pos-test la mayoría de los estudiantes justifican en base a la tendencia de la gráfica (“la curva baja”) o al parecido a una recta con pendiente negativa. Sólo en el pos-test un estudiante hace referencia a la velocidad en términos de la variación Δs y Δt.

S4. La gráfica D muestra el desplazamiento de un objeto respecto al tiempo durante un intervalo de tiempo de 10 segundos. ¿Qué gráfica representaría su velocidad y aceleración respectivamente, durante el intervalo de tiempo descrito?

Gráfica D



a) I y II b) I y III c) I y VI d) IV y II e) IV y VI f) V y II g) V y VI



En el pre-test, dos estudiantes contestaron correctamente al elegir las gráficas IV y VI, en el pos-test lo hacen cinco estudiantes, en el resto en ambos momentos seleccionan otras gráficas (véase Gráfica 8). Las acciones y algunas justificaciones al respecto aparecen en la Tabla 5.

Tabla 5. Acciones realizadas en la situación S4

Preg.	Pre-test	Pos-test
S4	• Seccionan la gráfica en intervalos. • Relacionan la forma de la gráfica en cada intervalo y aplican la derivada.	• Seccionan la gráfica por su forma en los intervalos respectivos. • Aplican criterios como: "la derivada de la distancia es la velocidad", "La derivada de la velocidad es la aceleración". • Relacionan las secciones de la gráfica con la derivada. "Si es parábola su derivada es una recta", "Si es recta su derivada es una constante".

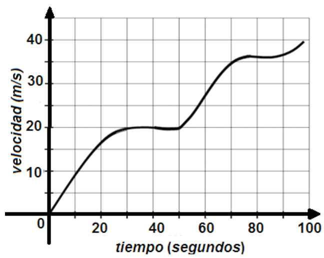
Las acciones realizadas por los estudiantes en el pre y pos-test fueron similares a lo que encontraron Salazar, Díaz y Bautista (2009) en una pregunta similar, en la mayoría destaca el uso de la derivada de la función cuadrática, lineal y constante, debido a la forma que tiene la gráfica en dichos intervalos. En este caso en el pos-test incrementaron los argumentos en este sentido aunque cabe aclarar que no se indujo esta relación en la secuencia de aprendizaje. Un estudiante en el pos-test utilizó el siguiente argumento: "Del cuatro al siete más o menos la distancia es cero, el tiempo sigue avanzando… veo que de cero a tres lleva igual un incremento de velocidad y más o menos es constante pues es una pequeña curva, aquí la velocidad va en incremento".

S5. La gráfica E muestra el movimiento de un objeto que se mueve en línea recta. ¿Cuál es su aceleración a los 60 segundos?

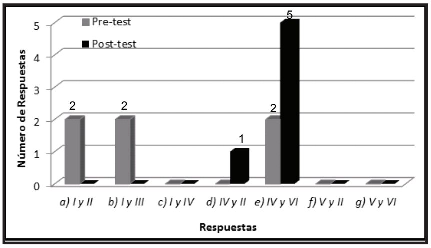
a) 27.5 m/s^2 b) 60 m/s^2 c) 0.75 m/s^2 d) 1.33 m/s^2

La aceleración del objeto a los 60 segundos es de 0.75 m/s^2. En el pre-test la mitad de los participantes contestó correctamente y cuatro en el post, el resto da otras respuestas (Gráfica 9).

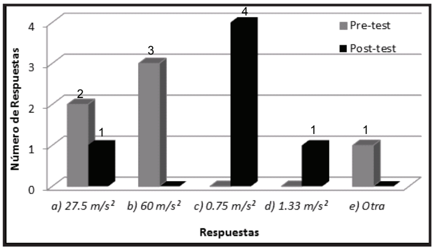
Gráfica E



Gráfica 8. Respuestas a la pregunta S4



Gráfica 9. Respuestas a la pregunta S5



Las acciones identificadas en sus producciones y argumentos se muestran en la Tabla 6.

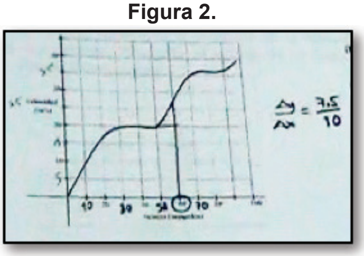
Tabla 6. Acciones realizadas en la situación S5

Preg.	Pre-test	Pos-test
S5	• Identifican variables en juego y sus correspondientes ejes (usan $a = v/t$). • Trazan un triángulo rectángulo de catetos $\Delta v/\Delta t$ (análogo a la pendiente).	• Representan los cambios Δv y Δt. • Dibujan un triángulo rectángulo con catetos Δv y Δt e hipotenusa que asemeja a la gráfica en torno de $t = 60$. • Usan el cociente $a = \Delta v/\Delta t$ en analogía con la pendiente y estiman la aceleración.

De acuerdo con las acciones y procedimientos empleados en el pre se notó que la mayoría asocia la aceleración con la fórmula $a = v/t$, donde v representa la ordenada y t la magnitud de la abscisa, sólo dos estudiantes se apoyan de la variación usando el cambio de velocidad y el cambio en el tiempo. En el pos-test la mayoría se apoya del cociente $\Delta v/\Delta t$ o $\Delta y/\Delta x$ sin hacer referencia a la tangente (quizá porque casi coincide con la gráfica en torno de $t = 60$ *s*), acción detectada por Salazar et al. (2009) en la que la aceleración media es adjudicada a la aceleración instantánea. Esta acción se nota en la explicación que EG utiliza para justificar sus procedimientos:

EG: "Lo que hago primero es ubicar el punto, las unidades vienen de cinco en cinco, entonces delta *y* es aproximadamente 7.5 y delta *x* es 10, lo divido y me da 0.75" (Ver Figura 2).

Figura 2.

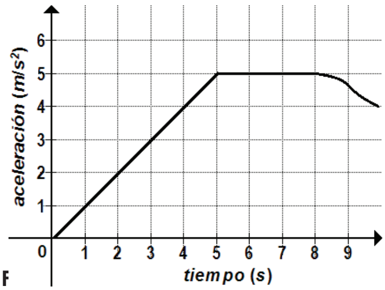


S6. La aceleración de un objeto está representada en la Gráfica F. ¿Cuál es su velocidad durante los primeros tres segundos?

a) 1 *m/s* b) 4.5 *m/s* c) 3.0 *m/s* d) 9 *m/s*

En el pre-test, no hubo respuestas correctas, en pos-test sólo un estudiante lo hace. El resto da otras respuestas (Gráfica 10). Al analizar sus producciones identificamos las siguientes acciones que en su mayoría condujeron a resultados erróneos (Tabla 7).

Gráfica



F

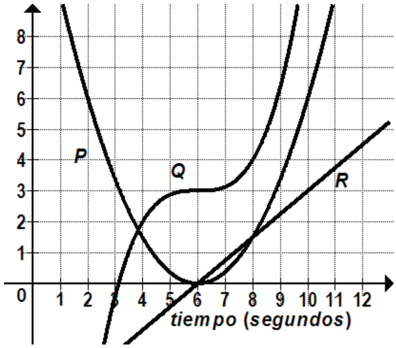
Tabla 7. Acciones realizadas en la situación S6

Preg.	Pre-test	Pos-test
S6	• Despejan v de $a = v/t$, v = (3)(3) = 9. • Calculan la pendiente: m = 3/3. • Usan una fórmula para la gráfica (p. e. $2x^2$) obtienen su integral.	• Despejan v de la fórmula $a = v/t$. • Calculan la pendiente de la recta y la dan como aceleración. • Calculan el área bajo la recta y la dan como aceleración (idea de reversibilidad).

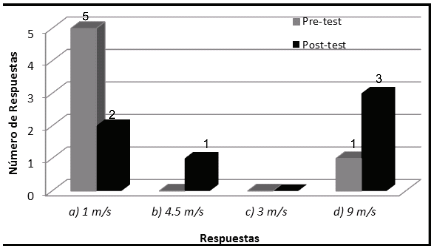
Esta pregunta tiene alto nivel de complejidad y rompe con los esquemas usados en las anteriores preguntas, aquí se cuestiona sobre el proceso inverso: dada la aceleración obtener la velocidad. Al contestarla en el pre-test los estudiantes argumentan: “como la aceleración es constante entonces la velocidad tuvo que ser constante”, idea errónea pues la aceleración es variable. Otros usan la idea de pendiente pensando quizá en la idea directa no en la inversa, ignorando que la situación implica el cálculo de un área, lo mismo ocurre en el pos-test. Sólo EA relaciona la obtención de la velocidad con el área, la aceleración es la derivada y la velocidad su integral, aunque en un inicio sus argumentos fueron inestables, después de la secuencia lo hace más firme. En general aquí hubo escasez de ideas variacionales y más aún de reversibilidad.

S7. A partir de las gráficas de la Figura 3, selecciona la gráfica que corresponda a la distancia, a la velocidad y a la aceleración.
a) *Q, P, R*
b) *Q, R, P* c) *R, P, Q*
En el pre-test, la mitad de los estudiantes contestaron correctamente, optaron por *Q*, *P*, R como las gráficas respectivas para distancia, velocidad y aceleración, mientras que en el pos-test fueron cinco. El resto optó por otras opciones, tal como se muestra en la gráfica 11.

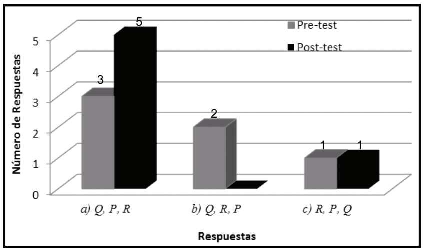
Figura 3



Gráfica 10. Respuestas a la pregunta S6



Gráfica 11. Respuestas a la pregunta S7



Las acciones identificadas en el pre-test fueron realizadas utilizando la derivada y no las ideas variacionales subyacentes. En el desarrollo de la secuencia se trabajó con la relación variacional entre la función distancia *s*(*t*) y sus razones de cambio $\Delta s/\Delta t$ que en conjunto conforman la función velocidad *v*(*t*), lo mismo con ésta y la aceleración. Sin embargo, en las justificaciones dadas en el pos-test, los estudiantes usan principalmente la derivada para decidir las respuestas, en particular se atienen a la disminución del grado del polinomio que las representa, si es cúbica su derivada es cuadrática o de grado dos, si es cuadrática su derivada es lineal, etc. (Tabla 8).

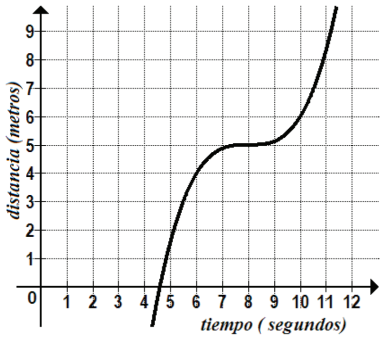
Tabla 8. Acciones realizadas en la situación S7

Preg.	Pre-test	Pos-test
S7	• Relacionan la curva dada con la fórmula de la función representada (p.e. x^3). • Utilizan la derivada (la derivada de $s(t)$ es $v(t)$) para tomar decisiones). • Utilizan la idea de que, el grado de la primitiva es disminuido en uno por su derivada.	• Utilizan la idea de derivada para decidir la primitiva inicial. La distancia es la primitiva y es cúbica, su derivada es la velocidad y es cuadrática, etc.

En el pre la mayoría dice "la primera derivada es la velocidad y la segunda derivada es la aceleración… Si la primera es cúbica, su derivada tiene que ser cuadrática y la siguiente derivada es una lineal". De manera similar en el pos-test, pero sin hacer referencia a velocidad y aceleración, ellos dicen: "si la primitiva es cúbica, la derivada es de segundo grado y la derivada de esta última será de primer grado". Sólo un estudiante difiere en sus planteamientos, pues su análisis parte de la idea de que la velocidad siempre será representada por una línea recta.

S8. La gráfica G representa la variación de la distancia respecto del tiempo de una partícula en movimiento. Bosqueja la gráfica de su velocidad y la de su aceleración.

Gráfica G



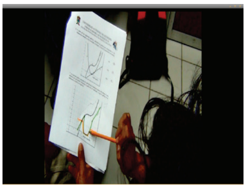
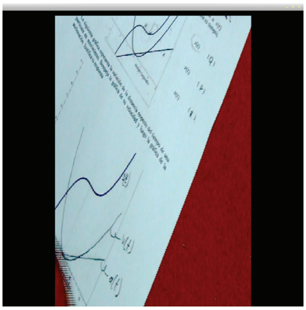
En el pre y pos-test, cinco de los participantes contestaron la pregunta y uno no la contestó (Gráfica 12). Tres bosquejos fueron aceptables en el pre y cuatro en el pos-test. Esta situación fue ubicada en el nivel alto, ya que al bosquejar las gráficas solicitadas se había previsto que utilizaran las relaciones entre la primitivas y sus razones de cambio, sin embargo la mayoría de los estudiantes se apoyaron en la similitud que tenía esta gráfica con las gráficas de la situación S7. Las principales acciones se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9. Acciones realizadas en la situación S8

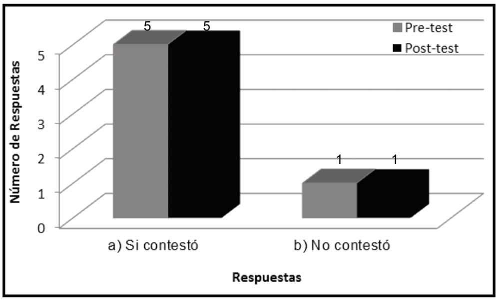
Preg.	Pre-test	Pos-test
S8	• Usan de las fórmulas: $v = d/t$, $a = v/t$. • Sus acciones son análogas a las de S7.	• Analizan la trayectoria. • Aplican la idea de derivadas sucesiva (si es cúbica su derivada es cuadrática, etc.). • Reproducen acciones realizadas en S7.

La mejoría notada en las acciones realizadas en el pre y post es casi nula. Sólo el estudiante ED en el pre se apoyó del comportamiento de la gráfica dada, en el pos-test la analizó globalmente y utilizó la idea de derivadas sucesivas, ver Tabla 10.

Tabla 10. Argumentos esgrimidos por ED

Pre-test	Pos-test
ED: “Seguí la función y esta es creciente aquí (se refiere a la dada) la velocidad es creciente pero aquí donde hace este cambio me confundí (se refiere a la zona de inflexión) pensé que en este cambio de aquí la velocidad tendría que ser negativa, luego vi que no. En realidad tiene que ser creciente la aceleración, la obtengo de la velocidad, si tengo un movimiento uniforme me da la recta pues tengo aceleración constante” (ver Figura 4).  **Figura 4**	**ED:** “En base a la situación anterior grafique estas” (ver Figura 5).  **Figura 5**

Gráfica 12. Respuestas a la pregunta S8



Conclusiones

La experiencia mostró un progreso significativo en la interpretación de gráficas en los aspectos locales alcanzando un nivel intermedio (Tabla 11), no así en los aspectos globales (Tabla 12) en donde su nivel alcanzado se queda en el elemental.

Tabla 11. Acciones de interpretación en aspectos locales

Aspectos locales	Pre-test	Pos-test	Nivel
Velocidad puntual. Velocidad: negativa, cero, positiva.	• Identifican variables y sus correspondientes ejes. • Usan la fórmula $v = d/t$. • Usan la relación: si la derivada es cero tiene máximo o mínimo.	• Trazan de tangentes auxiliados de triángulos rectángulos de catetos Δs y Δt. • Estiman la velocidad con el cociente $v = \Delta s/\Delta t$. • Interpretan la pendiente de la tangente como velocidad.	Intermedio.
Velocidad media (cero, negativa y constante).	• Identifican variables. • Identifican intervalo de velocidad nula (“no hay cambios, el tiempo corre y *d* no avanza, no se mueve”).	• Identifican variables. • Identifican intervalo de velocidad nula (“si es constante y su derivada es cero, su pendiente es cero, no hay cambios”).	Intermedio.

Aceleración puntual.	• Usan *a = v/t.* • Trazan triángulos rectángulos de catetos $\Delta v/\Delta t$ (idea de pendiente y razón de cambio).	• Representan los cambios Δv y Δt. • Trazan triángulos rectángulos de catetos Δv y Δt e hipotenusa como tangente a la curva. • Usan el cociente $a = \Delta v/\Delta t$. • Interpretan la pendiente de la tangente como la aceleración.	Intermedio.

En los aspectos locales, al menos dos tercios de los participantes pueden interpretar velocidades o aceleraciones puntuales como la pendiente de la recta tangente o la pendiente de la hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos Δs y Δt. En el pre-test se notó indistinción entre la velocidad puntual y la velocidad media, se privilegió el uso de la fórmula *v = d/t* en ambos momentos tal como también lo encontró Dolores et al. (2002); en el pos-test la interpretación la hacen trazando tangentes (auxiliados de triángulos rectángulos) cuyas pendientes son transferidas a la velocidad y aceleración puntual. Las acciones realizadas en el pos-test, coloca a los participantes en el nivel intermedio de interpretación de gráficas cinemáticas, de acuerdo a los niveles propuestos por Wainer (1992).

En las acciones de interpretación de aspectos globales de las gráficas se obtuvo un desarrollo insignificante, así se puede corroborar en las acciones realizadas en el pre y pos-test, ver Tabla 12.

Tabla 12. Acciones de interpretación en aspectos globales

Aspectos globales	Pre- test	Pos-test	Nivel
Obtención de la velocidad dada la gráfica de la aceleración.	• Despejan *v* de *a = v/t.* • Cálculo de la pendiente.	• Despejan *v* de *a = v/t.* • Cálculo del área bajo la sección rectilínea (integral). • Cálculo de pendiente.	Elemental.

Identificación de grafica de velocidad y aceleración dada la gráfica de la distancia.	• Asociación de derivadas con la forma de las curvas. • Disminuyen en uno los exponentes de sus derivadas.	• Identifican primitiva como la curva cuya fórmula es de mayor grado (la cúbica). • Utilizan la relación: la derivada de la distancia es la velocidad y de ésta es la aceleración.	Elemental.
Bosquejo de gráficas de velocidad y aceleración dada la de la distancia.	• Realizan acciones análogas a S7. • Usan $v = d/t$ y $a = v/t$.	• Realizan acciones análogas a las realizadas en la situación S7. • Utilizan las derivadas sucesivas.	Elemental.

En el cálculo de la velocidad dada la gráfica de la aceleración, la gran mayoría de los estudiantes no se dieron cuenta de que estaban frente a un problema inverso. Sólo un estudiante, se dio cuenta de eso y utilizó la idea de integral como área bajo el segmento rectilíneo de la gráfica. El resto manipuló la fórmula $a = v/t$ o bien dieron la pendiente. En cuanto al comportamiento global de las funciones de distancia, velocidad y aceleración, y su distinción, se encontró que hay intentos de utilizar razones de cambio para caracterizarlas sin embargo hay marcada preferencia por el uso de la derivada. Pero utilizada casi como un axioma y sin dar argumentaciones. Parten del hecho de que la derivada de la distancia es la velocidad y la derivada de esta última es la aceleración, pero sin dar argumentos variacionales que indiquen uso de relaciones significativas. Este resultado es consistente con el encontrado por Tejeda (2009), los estudiantes prefieren utilizar la derivada sin analizar las propiedades variacionales de las curvas.

La interpretación de gráficas es una tarea compleja y requiere de procesos agudos de visualización, pero los estudiantes son renuentes a utilizarlos (Eysemberg & Dreyfus, 1991), en este trabajo se fortalece esta tesis. Intencionalmente diseñamos y pusimos en práctica una secuencia de aprendizaje para estudiar las interpretaciones de gráficas usando lápiz y papel, pocas son las investigaciones que se hacen en el aula con estudiantes de nivel superior y con fines interventivos, nosotros contribuimos al campo de la investigación considerando estas variables. Por otra parte, en este trabajo afloraron varias ideas erróneas, dificultades y preconceptos, que fueron difíciles de cambiar, por ejemplo, el uso reiterado de la tesis de que la derivada de la distancia es la velocidad sin comprender las relaciones variacionales subyacentes entre esas gráficas. Estos resultados inducen a prestar atención en futuras investigaciones al cambio conceptual mediante intervenciones en el aula que consideren las posibilidades de trascender los obstáculos cognitivos, didácticos o epistemológicos, los cuales pueden preverse utilizando la Ingeniería Didáctica sugerida por Artigue (2009).

En futuros trabajos es necesario rediseñar la secuencia aquí experimentada y sus actividades específicas para centrarlas en aspectos más básicos del pensamiento covariacional sugerido por Carlson et al. (2003). Estas debieran centrarse en cuestiones tales como: ¿Qué variables cambian?; coordinación y representación de: los cambios en *x* e *y*; de la dirección de los cambios de una variable con respecto a otra; de las razones de cambio promedio y de las razones de cambio instantáneas. Hace falta más experiencia y conversión entre los sistemas: numérico, gráfico y analítico, incluso probar con fenómenos de cambio diferentes de los cinemáticos y con estudiantes que todavía no han cursado cálculo, porque parece que si tienen este antecedente, en vez de ayudarles obstruye una buena interpretación de gráficas utilizando ideas significativas sobre la variación.

Referencias Bibliográficas

- Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. En C. Winslow (Ed.), *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings from NORMA08* (pp. 7–16). Rotterdam: Sense Publishers.
- Beichner, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American Journal of Physis, 62*(8), 750–762.
- Brito, H. (1984). Hábitos, habilidades y capacidades. *Revista Científico Metodológica del Instituto Superior "Enrique José Varona"*, 6(13), 73–87.
- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, *42*(14), 353–369.
- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2000). Pensamiento y Lenguaje Variacional. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 69–91). México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México, D.F: Prentice Hall.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education,* 33(5), 352–378.
- Díaz Barriga, A. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de

competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Profesorado*, *17*(3), 11–33.

- Dolores, C., Alarcón, G. y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(3), 225–250.
- Dolores, C. (2013). *La Variación y la Derivada*. México, D. F.: Díaz de Santos.
- Eysemberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25–37). Washington: MAA
- Glazer, N. (2011). Challenges with graph interpretation: A review of the literature. *Studies in Science Education*, *47*(2), 183–210.
- Hernández, R., Fernández-Collado, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación.* 4ª Edición, México, D. F.: McGraw–Hill.
- Latorre, A. (2010). *La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa.* Barcelona: Graó.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60,* 1– 64.
- Lewin, K. (1973). Action research and minority problems. En K. Lewin (Ed.), *Resolving Social Conflicts: Selected Papers on Group Dynamics* (pp. 201–216). London: Souvenir Press.
- Luna, A. (2004). *Habilidades para la elaboración e interpretación de gráficas de cinemática.* (Tesis de Maestría). México: Universidad Autónoma de Nuevo León.
- McDermott, L., Rosenquist, M., y Van Zee, E. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, *55*(6), 503–513.
- Monteiro, C., y Ainley, J. (2004). Exploring the complexity of the interpretation of media graphs. *Research in Mathematics Education*, *6*(1), 115-128.
- Parmar, R. y Signer, B. (2005). Sources of Error in Constructing and Interpreting Graphs: A Study of Fourth-and Fifth-Grade Students with LD. *Journal of learning disabilities*, *38*(3), 250–261.
- Pérez, S. y Dibar, C. (2012). Primeras apropiaciones de la matemática en la física: Resolviendo problemas de cinemática en el primer año de la universidad. *Revista de Enseñanza de la Física*, *25*(1-2), 25-33.
- Roth, W. M. y Bowen, G. M. (2003). When are graphs worth ten thousand words? An expert-expert study. *Cognition and Instruction*, *21*(4), 429–473.
- Salazar, C., Díaz, H. y Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *Tecné, episteme y didaxis: Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología, (26)*, 62-82. Recuperada de http://www.pedagogica.edu.co/admin/UserFiles/12(1).pdf
- Tairab, H. y Khalaf Al-Naqbi, A. (2004). How do secondary school science students

interpret and construct scientific graphs?. *Journal of Biological Education*, *38*(3), 127–132.

- Tejeda, S. (2009). *Diseño de una actividad educativa tipo tutorial para la compresión de gráficas en cinemática*. (Tesis de Maestría). México: CICATA-IPN.
- Tobón, S., Pimienta, J. H. y García, J. A. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias.* México D. F.: Pearson.
- Urban, H. (2015). Motion sensors in mathematics teaching: learning tools for understanding general math concepts?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(4), 584-598.
- Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema*, *28*(48), 449-468.
- Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher*, *21*(1), 14 –23.