Revista de la Escuela Ciencias de la Educación - 1a ed. - Rosario
Laborde editor 2008
426 p.; 15 x 21 cm.

ISSN 1851-6297

1. Pedagogogía-Educación. I. Título
CDD 370.1

1º Edición: Diciembre 2008
Directora: Esp. Lic. Susana Del Valle N. Copertari


3 de Febrero 1065
Tel/Fax: (0341) 449 8802
Rosario (C.P. 2000) - Santa Fe - Argentina
e-mail: labordelibros@citynet.net.ar

Diseño y Diagramación: Liliana Aguilar

Agradecemos a:
- Asociación Cooperadora "José Pedroni" de la Facultad de Humanidades y Artes UNR.
- COAD Asociación Gremial de Docentes e Investigadores de la Universidad Nacional de Rosario.
- AGCER Asociación de Graduados en Ciencias de la Educación de Rosario.
- AMSAFE Rosario Asociación del Magisterio de Santa Fe (Delegación Rosario).
- CTA Central de Trabajadores Argentinos.

I.S.S.N. Nº: 1851-6297

Queda hecho el depósito que marca la Ley 11.723
Marca y características gráficas registradas en la Oficina de Patentes y Marcas de la Nación
Impreso en Argentina

# Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación

Año 4 • Nº 3 • 2008

Asociación Cooperadora "José Pedroni" de la Facultad de Humanidades y Artes UNR

Asociación Gremial de Docentes e Investigadores de la Universidad Nacional de Rosario

Asociación del Magisterio de Santa Fe (Delegación Rosario)

Asociación de Graduados en Ciencias de la Educación de Rosario

central de trabajadores de la argentina

# ACTIVIDADES QUE PERMITEN RECONOCER EL PENSAMIENTO PROPORCIONAL CUALITATIVO Y CUANTITATIVO EN ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

*Patricia Camarena Gallardo*
*Elena Fabiola Ruiz Ledesma*
(Instituto Politécnico Nacional-México)

**Resumen**

El presente artículo plantea el reconocimiento del pensamiento proporcional tanto cualitativo como cuantitativo del estudiante, a través de identificar las estrategias que se llevan a cabo al abordar las actividades planteadas a un grupo de 29 alumnos mexicanos (11 años de edad), que cursaban el sexto grado de educación básica. Se emplean como fundamentación teórica la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* y estudios realizados por investigadores que se han interesado en estos tópicos. La metodología está integrada por el diseño de las actividades, la descripción de los indicadores para la identificación de ambos tipos de pensamiento proporcional y el análisis de los resultados.

**Palabras clave**

Razón - Proporción - Pensamiento proporcional - Contexto - Enseñanza.

**Summary**

The present paper shows the development of the proportional qualitative thinking and proportional qualitative thinking of the student, through activities applied to a group of Mexican students (11 years old), that were studying the sixth grade of primary education. Using as framework *Mathematics in the Science Context* theory and other theoretical support studies done by researchers that had been interested in this topics. The methodology is integrated by the design of the activities, indicators description and the analysis of the results gotten in the activities.

**Key words**

Ratio - Proportion - Proportional thinking - Context - Teaching.

## Introducción

Muchos de los conceptos matemáticos que se abordan en los niveles educativos de secundaria o bachillerato, tienen sus raíces en la escuela elemental. En efecto, hay temas de matemáticas que se introducen en la primaria y dependiendo de la forma como se traten, así como de la construcción que se haga de los conceptos que se involucren en ellos, es lo que permite a los estudiantes avanzar hacia la comprensión de conceptos que trabajarán en los siguientes niveles educativos.

Por la importancia que revisten las nociones previas sobre los conceptos de **razón** y **proporción** en conceptos matemáticos de los niveles de educación media y superior, se aborda la problemática referida a la construcción de tales conceptos en la educación básica, para lo cual se proponen actividades de estos tópicos con un grupo de estudiantes que cursan el sexto grado de educación primaria en México (niños de 11 años de edad). Dichas actividades permitirán identificar el pensamiento proporcional tanto cualitativo como cuantitativo en los estudiantes.

Lo cualitativo se apoya en reconocimientos lingüísticos creando categorías de comparación, como grande o pequeño. Dentro de lo cualitativo se incluye lo intuitivo, que se basa en la experiencia y en lo empírico y, lo perceptual que se apoya en los sentidos.

Lo cuantitativo hace referencia a actividades que permiten al alumno contar, medir y emplear cantidades en los procedimientos.

## Problema de investigación

El problema de investigación consiste en analizar las estrategias que emplean los estudiantes al resolver las actividades propuestas en contexto con la finalidad de identificar hasta dónde tienen desarrollado su pensamiento proporción cualitativo y cuantitativo, de acuerdo a los indicadores que se establecen con antelación.

De esta forma se establecen tres categorías de estudio: el pensamiento proporcional cualitativo, el tránsito del pensamiento proporcional cualitativo al pensamiento proporcional cuantitativo y en sí el pensamiento proporcional cuantitativo.

## Justificación

Los tópicos de razón y proporción constituyen una de las bases de algunos conocimientos de la aritmética, como el manejo de problemas multiplicativos, que se abordan en la escuela elemental, como lo señalan Ruiz, E. F., Ruiz, E., y Acosta, F. (1997a y 1997b), Ruiz, E. F. (1997 y 2000). Los conceptos de variación proporcional, regla de tres, razón de cambio y derivada, entre otros, también se fundamentan en los conceptos de razón y proporción. Si estos últimos no son construidos adecuadamente en el estudiante durante su trayecto en la educación básica, entonces, en los niveles educativos posteriores tendrán serios problemas en la construcción de nuevos conceptos matemáticos que hacen uso, de forma explícita o implícita, de los conceptos de razón y proporción.

## Objetivos de la investigación

- Diseñar las actividades que permitirán identificar un pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo de tal forma que se distingan cuáles actividades identifican al cualitativo, cuáles al cuantitativo y cuáles al tránsito del cualitativo al cuantitativo.
- Definir los indicadores que permitan identificar el desarrollo de un pensamiento proporcional cualitativo, cuantitativo y el tránsito del cualitativo al cuantitativo.
- Identificar las estrategias que usa el estudiante al resolver problemas de razón y proporción simple y directa, para reconocer los indicadores del pensamiento cualitativo y cuantitativo ligado a estos tópicos.

## Marco Teórico

La *Matemática en el Contexto de las Ciencias* es el marco teórico de la investigación, en donde se establece que la matemática debe ser presentada al estudiante, de cualquier



nivel educativo, en el contexto de problemas o proyectos del interés del alumno (Camarena, 1984). A partir de este lineamiento se incluyen los investigadores que hacen referencia al pensamiento proporcional cualitativo, al tránsito hacia lo cuantitativo y a lo que se centra en lo cuantitativo.

### *a. La Matemática en el Contexto de las Ciencias*

Esta teoría toma al proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática como un sistema, el cual incluye al estudiante, el profesor y el contenido matemático a ser aprendido los cuales se encuentran inmersos en un ambiente de tipo social, económico, cultural y político (Camarena, 1995, 2005). Esta mirada sistémica define cinco fases de la teoría, las cuales constituyen las líneas específicas de investigación: la fase curricular, la didáctica, la cognitiva, la epistemológica y la de formación de docentes (Camarena, 1984, 1995, 2005).

### *b. Piaget y las raíces cualitativas del pensamiento proporcional*

Piaget (1978), a través de sus experimentos realizados, señala que *el niño adquiere la identidad cualitativa antes que la conservación cuantitativa* y hace una distinción entre comparaciones cualitativas y la verdadera cuantificación.

En efecto, para Piaget la noción de proporción comienza siempre de una forma cualitativa y lógica, antes de estructurarse cuantitativamente.

Piaget (1978) comenta que entre los 11 y los 12 años, se ve en el sujeto la presencia de la noción de las proporciones en diferentes ámbitos, tales como: las proporciones espaciales (figuras semejantes), las relaciones entre pesos y longitudes de los brazos en la balanza, las probabilidades, etc. En el caso de la balanza de barra, el sujeto puede comprender, mediante la manipulación del dispositivo, que es posible conservar el equilibrio teniendo dos pesos iguales a las mismas distancias del centro, pero también se conserva el equilibrio disminuyendo un peso, pero alejándolo y aumentando el otro, aunque aproximándolo al centro. La comprensión de esta proporcionalidad (tanto directa como inversa), se da en primer lugar por vía cualitativa: "es lo mismo aumentar el peso que la distancia" luego en formas métricas simples: "disminuir el peso aumentando la longitud equivale a aumentar el peso disminuyendo la longitud".

### *c. Streefland y los aspectos cualitativos del pensamiento proporcional*

Otro investigador en el que nos apoyamos es Streefland (1984a y 1984b), quien señala que el énfasis se debe dar en la enseñanza temprana de los conceptos de razón y proporción, la cual debe partir de niveles cualitativos de reconocimiento de éstos y hacer uso de recursos didácticos que favorezcan el desarrollo de patrones perceptuales, en apoyo a los correspondientes procesos de cuantificación.

### *d. Investigadores que abordan el tránsito del pensamiento proporcional cualitativo al cuantitativo*

De acuerdo a Piaget e Inhelder (1978) después de desarrollar la parte perceptual del estudiante aparece un ordenamiento, al hacer comparaciones, lo cual se puede constatar cuando el estudiante emplea las frases "mayor que..." y "menor que...". Al respecto, Piaget señala que en el paso de lo cualitativo a lo cuantitativo aparece la idea del orden sin que todavía emerja la cantidad, a lo que él llama *cuantificaciones intensivas*.

Posteriormente, cuando el alumno usa la medida al hacer comparaciones, primeramente confrontando partes del objeto y sobreponiendo una figura en otra y después, usando un instrumento de medida, convencional o no. En términos de Freudenthal (1983) las comparaciones se muestran en dos modalidades: directas e indirectas. La modalidad directa de comparar es cuando un objeto se sobrepone en otro objeto, mientras que la indirecta es cuando se tienen dos objetos (A y B) y un tercer elemento para comparar (C).

### *e. Lo que se centra en lo cuantitativo*

De esta manera, un salto importante para acercarse a la cuantificación es que el estudiante empiece a medir, utilizando números naturales al hacer sus comparaciones. La medición es un instrumento importante como prerrequisito para el uso de operadores multiplicativos.

Posteriormente, el estudiante establecerá relaciones entre magnitudes, de esta forma trabaja en el campo de los números naturales y también emplea expresiones fraccionarias, incursionando de manera elemental en el campo de los racionales.

Según Hart (1988), el alumno llegará a designar a la razón como la relación entre dos magnitudes y a la proporción como la relación de equivalencia entre dos razones.

## Método

### *a. Indicadores*

Esta sección se ha dividido en tres partes, las cuales corresponden a cada una de las tres categorías de estudio:

1. Se definen los indicadores que permiten reconocer lo que corresponde al pensamiento proporcional cualitativo del estudiante.
2. Se muestran los indicadores que favorecen el tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo.
3. Se presentan los indicadores que se refieren al pensamiento proporcional cuantitativo.

   1. *Dentro de lo cualitativo están:*
      - Las acciones con base en la experiencia y el desarrollo de acciones empíricas.
      - Las expresiones lingüísticas que crean categorías de comparación.
      - Las acciones que se apoyan en los sentidos, en particular lo visual.
      - Las acciones que no proporcionan ni demandan cantidades.
   2. *En el tránsito de lo cualitativo y lo cuantitativo tenemos:*
      - La idea de orden.
      - El conteo.
      - La medición indirecta.
      - La medición directa.
   3. En lo cuantitativo
      - El uso de cantidades.
      - El uso del operador.
      - Comparación de magnitudes mediante un cociente, es decir, establecimiento de una relación entre magnitudes usando la operación de división.
      - El empleo del algoritmo conocido como la regla de tres o el tercero excluido.

### *b. Institución Educativa y los sujetos de la Investigación*

El estudio tuvo lugar en un escenario natural, con un grupo de 29 estudiantes de sexto grado de educación básica perteneciente a una escuela de la Secretaría de Educación Pública del turno matutino, la cual fue elegida porque presentaba rasgos comunes a un amplio espectro de escuelas urbanas. Está ubicada en una zona de la ciudad de México, en continuo crecimiento pero de un estatus socioeconómico bajo.

### *c. Actividades*

Las actividades presentan los conceptos de razón y proporción en contextos que son familiares para el estudiante, de acuerdo al marco teórico de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias*. Estas actividades se dividen en tres bloques, en el primero, integrado por tres actividades, donde se busca emerjan justificaciones más apoyadas en la apreciación cualitativa, ya que interesó ver cómo cualitativamente se construye el pensamiento, prescindiendo de cantidades explícitas asociadas a las relaciones de proporcionalidad dadas; el segundo incluyó tres actividades en donde se utilizó la cuadrícula, con la finalidad de favorecer el tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo. El tercer bloque incluyó actividades de razón y proporción cuantificadas, ya que se daban algunos valores y se les demandaban nuevos valores.



### Diseño de las actividades

Para abordar cada una de las tres categorías de estudio planteadas, se presentan las siguientes actividades en diversos contextos con sus posibles indicadores.

**Actividad 1.** Se pretende reconocer qué tan desarrollado tiene el estudiante el aspecto cualitativo de la proporcionalidad a través de presentarle el dibujo de una casa y de solicitarle escoger la reducción de ésta, dadas cuatro figuras más pequeñas que la original. Tres de ellas no están en proporción con respecto a la original, sólo una, y corresponde a la que tiene la letra C.

Los indicadores que permitirán establecer el desarrollo del pensamiento proporcional cualitativo en esta actividad son los reconocimientos lingüísticos que se pueda hacer el estudiante cuando establezca alguna categoría de comparación, como grande o pequeño; también la acción visual para elegir la figura reducida. Aquí no se proporcionan ni se demandan cantidades.

**Actividad 2.** En esta actividad se muestra una sucesión de rectángulos, cuyas dimensiones corresponden a la mitad del precedente y se les solicita a los alumnos com-

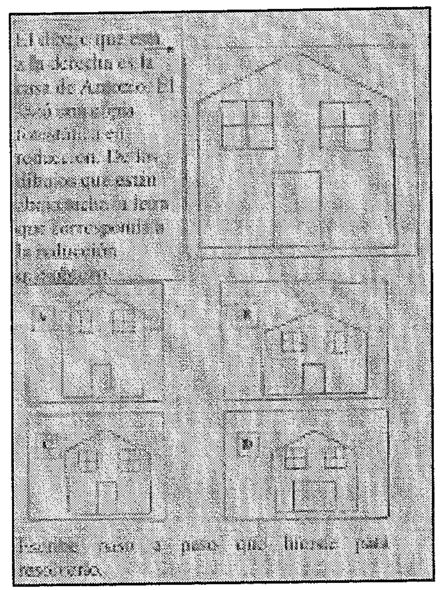


Figura 1. Actividad 1

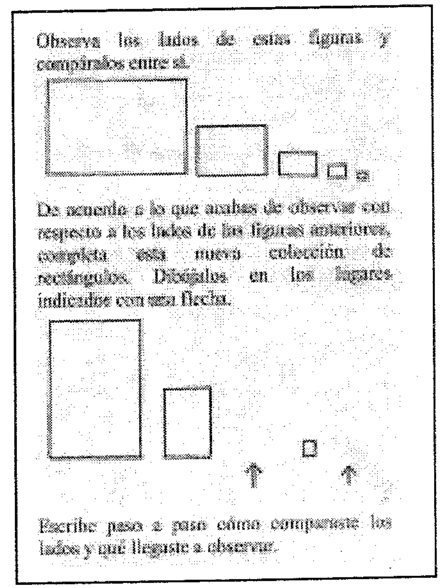



Figura 2. Actividad 2

pletar una segunda sucesión, para lo cual deben darse cuenta de que los rectángulos que dibujarán tienen que reducirlos a la mitad, tanto de largo como de ancho.

El indicador que ubica a esta actividad en el terreno de la proporcionalidad cualitativa es el aspecto visual ya que se pretende indagar si los estudiantes reconocen visualmente la relación (razón) en la que se encuentran las dimensiones de los rectángulos (los largos entre sí o los anchos entre sí). También se quiere saber si pueden dibujar los rectángulos faltantes apoyándose en el reconocimiento visual que hagan.

**Actividad 3.** En la actividad se solicita amplificar al doble linealmente la figura de un chaleco, dándole únicamente una cuadrícula para dibujarlo en ella.

Esta actividad fue diseñada para reconocer el tránsito del pensamiento proporcional cualitativo del estudiante al cuantitativo ya que se empleó la cuadrícula para que el estudiante pudiera contar y dibujar la figura amplificada al doble linealmente. El indicador empleado es el conteo.

**Actividad 4.** En esta actividad también se empleó una cuadrícula como un medio de apoyo para amplificar una figura, pero aquí se le proporcionó al estudiante una parte de la figura dibujada. No hubo texto en la instrucción, solamente se les mencionó que completaran la figura del barco.

El indicador que ubica a la actividad en el tránsito del pensamiento proporcional cualitativo del estudiante al cuantitativo es el conteo que debe realizar para darse cuenta que lo que ya está dibujado se encuentra amplificado al triple linealmente del modelo dado y poder completar la amplificación de la figura, mediante el conteo, apoyándose en la cuadrícula.

**Actividad 5.** Con esta actividad, se pretende indagar si el estudiante puede completar una figura, que es la reducción de la original, de tal manera que preserve la proporcionalidad o que conserve la forma de la figura original.

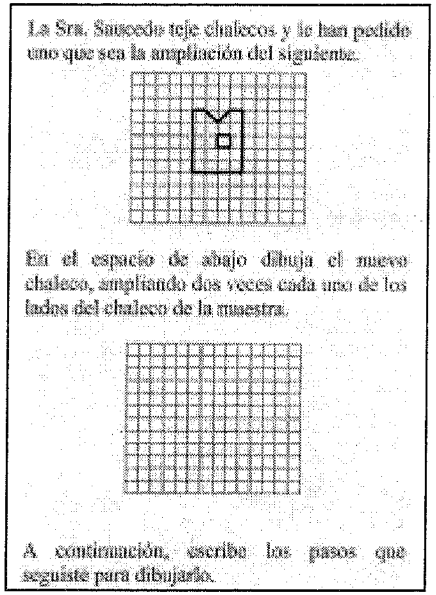



Figura 3. Actividad 3

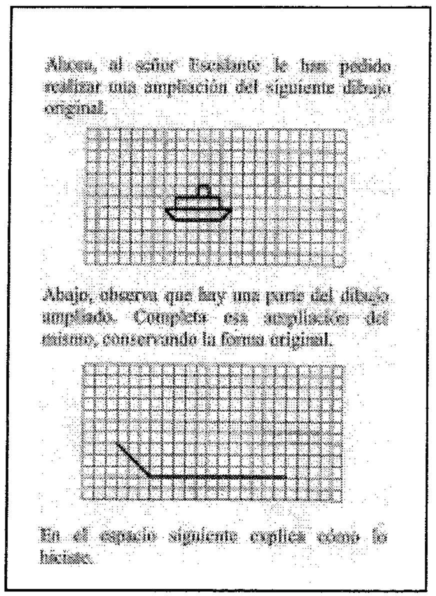



Figura 4. Actividad 4



El indicador de esta actividad se ubica en el tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo y es el conteo en la cuadrícula.

Las cinco actividades restantes se centraron en el campo cuantitativo del pensamiento del estudiante.

**Actividad 6.** Con esta actividad se pretende analizar las relaciones entre dos magnitudes que el estudiante puede establecer, ya sea entre dos dimensiones del mismo tipo (largos entre sí) o entre dimensiones diferentes de una misma figura (largo y ancho). La finalidad es ver si pueden establecer una relación entre los valores dados, para encontrar el desconocido, así como la forma en que establecen las relaciones. Es por ello que esta actividad se divide en dos partes. Con la primera interesa reconocer si el estudiante compara magnitudes del mismo tipo, que corresponde a comparar la longitud del largo de dos rectángulos para identificar la razón en la que se encuentran. Esta comparación Freudenthal (1983) la denomina "comparación interna". Con la segunda interesa analizar si el estudiante compara dos magnitudes de distinto tipo, es decir, comparar el largo y el ancho de una misma figura para encontrar la relación o razón en la que se encuentran. Esta comparación Freudenthal (1983) la denomina "comparación externa". Esto se propone a través de completar una figura, conociendo los valores del ancho y largo de un rectángulo y el valor del segmento que representa al ancho o al largo de otro rectángulo que debe ser proporcional. En ambas partes de la actividad, el valor conocido de los rectángulos que se pide sean proporcionales, corresponde al ancho.

En el primer caso el largo del rectángulo dado mide el triple del segmento que corresponde al largo del rectángulo que se pide construir proporcionalmente. En el segundo caso el largo del rectángulo dado es

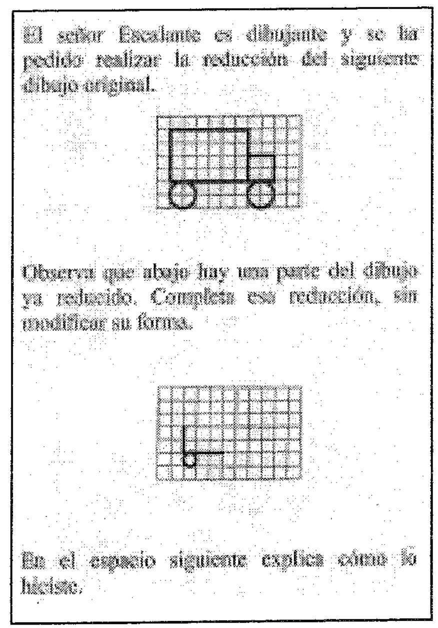



Figura 5. Actividad 5.

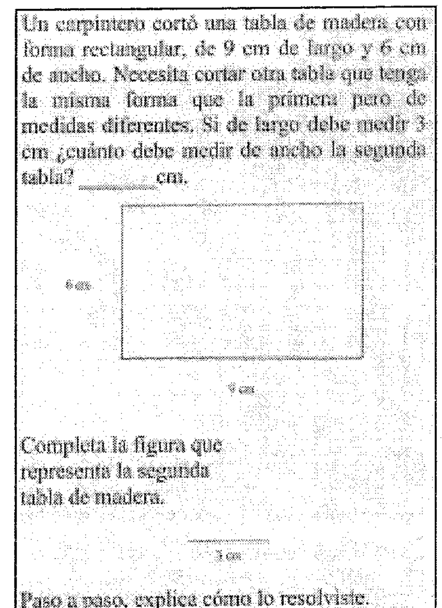



Figura 6. Actividad 6, parte 1

12/5 del segmento que corresponde al largo del rectángulo que se pide construir proporcionalmente.

Los indicadores en esta actividad para el análisis del pensamiento proporcional cuantitativo del estudiante son: El uso de cantidades, el uso de operadores multiplicativos directos o inversos y el empleo del algoritmo conocido como la regla de tres o el tercero excluido.

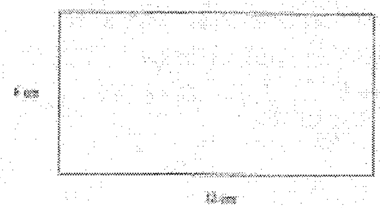
**Actividad 7.** En esta actividad se plantean preguntas relacionadas a un contexto familiar mexicano, para el estudiante de sexto grado; como es el caso de preparar chocolate con leche para una merienda en donde habrá invitados. Para dar respuesta a las preguntas se requiere que el estudiante complete una tabla y para ello debe darse cuenta cuál es el operador multiplicativo o también llamado valor constante que le permite pasar de un renglón a otro en una misma columna o de un valor a otro en distintas columnas. De tal forma que una vez completada la tabla puede dar respuesta a las preguntas formuladas.

La finalidad es que el estudiante pueda establecer una relación de cociente (razón, como lo señala Hart (1988)), entre la cantidad de barras de chocolate y los litros de leche o viceversa. Puede darse el caso que el estudiante no complete la tabla y resuelva las preguntas al percatarse que la razón entre las barras de chocolate y los litros de leche es de 2 a 1.

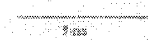
Esta actividad pretende analizar el pensamiento proporcional cuantitativo del estudiante porque se espera que al usar la tabla maneje el operador multiplicativo (x2), también averiguar si algún estudiante emplea "la regla de tres" para dar respuesta a las preguntas y revisar si emplea el valor unitario que se le da, es decir, que a un litro de leche le corresponden 2 barras de chocolate, para poder determinar los valores restantes.

**Actividad 8.** En esta actividad se pretende que el estudiante determine el precio de dos botes de pintura, uno de 1 litro y el otro de 4 litros, se les da el precio de un bote

Un carpintero cortó una tabla de madera con forma rectangular, de 12 cm de largo y 6 cm de ancho. Necesita cortar otra tabla que tenga la misma forma que la primera pero de medidas diferentes. Si de largo debe medir 5 cm ¿cuánto debe medir de ancho la segunda tabla? __________ cm.



Completa la figura que representa la segunda tabla de madera.



Paso a paso, explica cómo lo resolviste.

Figura 6. Actividad 6, parte 2

Lee y completa.

La Sra. Saucedo va a tener invitados a merendar y pensó hacer chocolate con leche. Ayúdala a saber cuántas barras de chocolate necesita para 2 litros de leche ________ y cuántas para 5 litros de leche __________.

También ayúdala a saber cuántos litros de leche debe comprar para 6 barras de chocolate: __________ litros.

Auxíliate, llenando la siguiente tabla.

| Barras de chocolate | Litros de leche |
|---|---|
| 2 | 1 |
| | 2 |
| 6 | |
| | |
| | 5 |

Explica qué hiciste para contestar las preguntas.

Figura 7. Actividad 7



de 20 litros. En esta actividad una parte de la información es dada a través del texto y la otra por medio del dibujo.

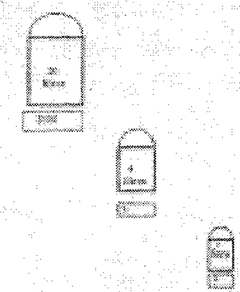
La actividad 8 pretende identificar si el estudiante emplea la regla de tres para resolverla, que es uno de los indicadores que se ubica en lo cuantitativo, también si el estudiante emplea operaciones y de esta forma está trabajando con cantidades de forma explícita. Al emplear operaciones es de interés reconocer si el estudiante identifica el precio unitario del bote de pintura y con ello determinar el precio del bote que tiene 4 litros de pintura.

**Actividad 9.** En esta actividad se le da al estudiante el precio de 4 bolsas de dulce y se le pide determinar el precio de 7 bolsas de los mismos dulces. Se le solicita explique el procedimiento seguido para reconocer si emplea la regla de tres, si hace operaciones y cuáles efectúa y si logra establecer la relación de cociente o razón, que hay entre el precio y cantidad de bolsas.

Este problema está clasificado entre los de valor perdido o desconocido para analizar si el estudiante emplea la regla de tres o efectúa operaciones, que son indicadores para analizar el pensamiento proporcional cuantitativo. Al analizar las operaciones que efectúan interesa revisar si el estudiante logra determinar el "valor unitario" de una bolsa de dulces para encontrar el costo de las 7 que le piden.

**Actividad 10.** En esta actividad se le pide al estudiante que invente o formule una situación problemática a partir de conocer tres cantidades que se encuentran en una tabla, los encabezados de las columnas son: número de paquetes y número de estampas. Dos de los valores conocidos corresponden a la primera columna, mientras que el otro a la segunda. En esta ocasión no se les da a los

Luis va a ayudar a su papá a pintar la casa y necesitan varios botes de pintura. Ellos saben que 20 litros cuestan 300 pesos. Ayúdalos a calcular el precio de los otros botes requeridos. Completa:



En el espacio siguiente escribe qué es lo que hiciste para resolverlo.

Figura 8. Actividad 8

En la siguiente tabla se te proporcionan algunos datos:

| Número de paquetes | Número de estampas |
|---|---|
| | |
| | |
| 3 | 15 |
| | |
| 5 | |

Inventa un problema relacionado con los datos que se te proporcionan y resuélvelo.

Completa la tabla y explica cómo lo hiciste.

Figura 9. Actividad 9

alumnos el dato correspondiente al valor unitario, es decir, no se les dice la cantidad de estampas que contiene un paquete, lo que hace que este problema sea diferente a la actividad número 7 en donde aparece también una tabla pero en ella se puede identificar inmediatamente el valor unitario al ver que a un litro de leche le corresponden 2 barras de chocolate.

Con el diseño de esta actividad se pretende analizar el pensamiento proporcional cuantitativo ya que los indicadores son si emplean algún operador multiplicativo para llenar la tabla o si usan la regla de tres para determinar los valores desconocidos.


**Figura 10.** Actividad 10.

### Resultados y Análisis

Una vez aplicadas las actividades a los 29 estudiantes del grupo del estudio y revisada cada una de las actividades abordadas, se procedió a concentrar los resultados obtenidos en una tabla (1), la cual fue organizada como se describe a continuación.

### Descripción de la tabla 1 que concentra los resultados

La tabla 1 se divide en 13 columnas, la primera contiene el nombre de los estudiantes, mismos que están ordenados de mayor a menor en cuanto al total de aciertos obtenido; las siguientes 12 columnas comprenden los números de las actividades colocadas en forma descendiente, con base en la cantidad de estudiantes que resolvió correctamente la actividad. La última columna contiene el total de aciertos por estudiante y en la última fila de la tabla 1 se encuentra el total de aciertos por actividad.

Se empleó la letra A para simbolizar a la palabra actividad, la cual va seguida de un número que corresponde al que se le asignó en la aplicación; de esta manera la actividad 1 aparece en la tabla 1 como A1 y así sucesivamente.

Se empleó la letra C para indicar que la respuesta fue correcta y la letra I para señalar que el resultado fue incorrecto. Se utilizó NC para mostrar que el estudiante no abordó la actividad.

Es importante recordar que la actividad 6 se dividió en dos partes, por ello el total de respuestas son 11.

### Un primer acercamiento a los resultados de la tabla 1

Una primera observación general que se detecta es que 27 de los 29 estudiantes resolvieron todas las actividades, los 2 restantes dejaron sin contestar entre una y dos actividades.

Nueve de los 29 alumnos contestaron correctamente más de la mitad de las actividades, por lo que 20 de 29 respondieron correctamente menos de la mitad de las actividades.

Uno de los 29 niños obtuvo el máximo de aciertos, que fueron 10 de las 11 actividades.



Uno de los 29 estudiantes tuvo el mínimo de aciertos que correspondió a una de las 11 actividades.

Una de las 11 actividades se consideró la más accesible para los estudiantes ya que fue resuelta correctamente por casi la totalidad del grupo (27 de 29 alumnos) y corresponde a la actividad número 7.

La tarea 4 se consideró como la de mayor grado de dificultad debido a que sólo 5 de los 29 estudiantes la resolvieron correctamente.

### Análisis de resultados de acuerdo a la estrategia usada

A continuación se muestran las estrategias que usa el estudiante al resolver problemas de razón y proporción simple y directa, para poder identificar los indicadores del pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo.

**Análisis de la actividad 1.** La mitad del grupo eligió en forma correcta la casa reducida, los argumentos dados para la selección fueron: *"es la más parecida", "es igual pero más pequeña", "no se le quitó, ni se le aumentó nada", "viendo todas y comparando"* (este último caso fue por discriminación visual) y *"no se le quitó ni se le aumentó nada"*.

La otra mitad del grupo eligió la casa incorrecta, en su mayoría fue aquella cuya reducción del ancho no corresponde a la mitad como en todo lo demás, y es la que tiene la letra (B). En general los estudiantes que la seleccionaron comentaron que fue porque es muy parecida a la original. Se observa que estos alumnos no se fijaron en todas las partes de la casa, al platicar con ellos mencionaron que solamente la reducción es aquello más pequeño a una figura dada, pero en ningún momento dijeron algo que indicara el hecho de tomar en cuenta que todas las partes que integran la figura deben tener el mismo tamaño proporcional. Se pudo observar que varios niños sólo se centraron en una de las dimensiones.

Los argumentos que dieron se clasificaron en dos categorías: una de ellas correspondió a aquellos alumnos que eligieron a la casa reducida basándose en la definición que ellos tenían de reducción "es igual pero más pequeña" o "no se le quitó, ni se le aumentó nada". En la segunda categoría quedó el argumento "es la más parecida" y fue empleada tanto por alumnos que seleccionaron la casa C como la que no estaba reducida. Esto indica que el término "parecida" no refleja en todos los casos la idea de proporción. Asimismo, se observa la necesidad de profundizar más, en clases, en el terreno cualitativo de la proporcionalidad.

**Análisis de la actividad 2.** En general los alumnos se percataron que los rectángulos que tenían que dibujar deberían ser más pequeños que los precedentes, pero no descubrieron en qué proporción estaban reducidos, es decir, no se dieron cuenta del patrón utilizado en la reducción de los rectángulos que componían la sucesión. Hubo comparación en el terreno cualitativo, para lo cual emplearon como recurso lo visual y lo intuitivo, ya que no midieron haciendo uso de algún instrumento, pero la dificultad de la mayoría fue la centración en una de las dimensiones.

**Análisis de la actividad 3.** Fue una de las actividades menos accesibles para los estudiantes, ya que muy pocos llegaron a la obtención correcta de la actividad. En ella tenían que amplificar al doble linealmente un dibujo dado, apoyándose en una cuadrícula. Las estrategias empleadas fueron: sumar dos veces la misma cantidad de cuadros, después de haber realizado un conteo de ellos, en una dimensión o en las dos; multiplicar por dos la cantidad de cuadritos de uno o dos lados. Pero el error más común, fue el duplicar un solo lado de la figura (por cualquiera de las dos vías, sumar el doble o multiplicar por dos).

Se observó que la cuadrícula fue un medio de apoyo para el conteo de los cuadros, independientemente de que la cantidad que aumentaron no fue la correcta.

En general no hubo una interpretación adecuada del texto, pues predominó el término ampliación (aunque en la mayoría de los casos el significado que de él tenían los alumnos era erróneo) y al parecer no se fijaron en que la ampliación debía de ser al doble en cada uno de

**Tabla 1. Concentración de los resultados de las actividades**

| Estudiante / No. Actividad | A7 | A9 | A10 | A1 | A5 | A6/1 | A2 | A8 | A3 | A6/2 | A4 | Total de respuestas correctas por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Nuria G. | C | C | C | C | C | C | C | C | C | I | C | 10/11 |
| 2. Paulina L. | C | I | C | I | C | C | C | C | I | C | C | 8/11 |
| 3. Mayra H. | C | C | C | C | C | I | C | C | I | I | I | 7/11 |
| 4. Ana Belen G. | C | C | C | C | C | I | C | C | I | I | I | 7/11 |
| 5. Jose M. | C | C | I | I | C | C | I | C | I | C | I | 6/11 |
| 6. Alejandra P. | C | C | I | C | C | C | I | I | C | I | I | 6/11 |
| 7. Erick C. | C | C | C | C | C | C | I | I | I | I | I | 6/11 |
| 8. Anahí L. | C | C | C | C | I | NC | I | C | C | I | I | 6/11 |
| 9. Miguel J. | C | C | I | C | I | C | I | I | I | C | C | 6/11 |
| 10. Wendy Z. | C | C | C | I | C | I | I | I | C | I | I | 5/11 |
| 11. Sandra B | C | C | C | I | I | C | I | I | I | I | C | 5/11 |
| 12. Victor Glz. | C | C | C | C | C | I | I | I | I | I | I | 5/11 |
| 13. Javier H. | C | I | I | C | C | I | C | I | I | C | I | 5/11 |
| 14. Lizbeth C. | C | C | I | C | C | I | I | I | I | C | I | 5/11 |
| 15. Ana G. | C | I | I | C | I | I | C | I | C | I | C | 5/11 |
| 16. Mario G. | C | I | NC | C | C | C | I | I | C | NC | I | 5/11 |
| 17. Jonathan M. | C | I | C | I | C | I | I | I | I | C | I | 4/11 |
| 18. Noemí C. | C | C | C | I | C | I | I | I | I | I | I | 4/11 |
| 19. Karen M. | C | C | C | C | I | I | I | I | I | I | I | 4/11 |
| 20. Nadia Ch. | C | C | C | I | I | I | C | I | I | I | I | 4/11 |
| 21. Victor Gtz. | C | C | C | I | I | C | I | I | I | I | I | 4/11 |
| 22. Edgar S. | C | I | I | I | C | I | I | I | C | I | I | 3/11 |
| 23. Dulce S. | C | C | I | C | I | C | I | I | I | I | I | 4/11 |
| 24. Mary C. G. | C | I | I | I | I | C | I | C | I | I | I | 3/11 |
| 25. Lizet L. | C | C | C | I | I | I | I | I | I | I | I | 3/11 |
| 26. Eduardo M. | C | I | I | C | I | I | I | I | I | I | I | 2/11 |
| 27. Juana N. | I | C | C | I | I | I | I | I | I | I | I | 2/11 |
| 28. Jazmín L. | C | I | I | I | I | I | I | C | I | I | I | 2/11 |
| 29. Miguel V. | I | I | I | I | I | I | C | I | I | I | I | 1/11 |
| Total de aciertos por Actividad | 27/29 | 19/29 | 16/29 | 15/29 | 15/29 | 11/29 | 8/29 | 8/29 | 7/29 | 6/29 | 5/29 | |

A = ACTIVIDAD; C = CORRECTO; I = INCORRECTO; NC = NO CONTESTÓ



los lados del chaleco dado. Al platicar con algunos estudiantes se observaron varias cosas: una de ellas agrupa a aquellos estudiantes que no tenían clara la noción de proporción, desde el punto de vista del dibujo a escala, ya que en sus respuestas sólo mencionaron que ampliar algo es *"hacerlo más grande"*. Se encontraron dibujos de chalecos en donde la cantidad de cuadros que aumentaron indica la no comprensión de la proporción. Al parecer muchos alumnos confundieron la expresión dada en el texto con aumentar dos cuadros en cada lado. Otro subgrupo de alumnos se caracterizó porque duplicaron la cantidad de cuadros en una sola dimensión, y en el tercer grupo de niños están aquellos que mostraron tener clara la noción de proporción desde el punto de vista de la idea del dibujo a escala, pues dibujaron un chaleco teniendo el doble de cuadritos en cada dimensión.

**Análisis de la actividad 4.** En esta actividad también se empleó la cuadrícula como un medio de apoyo para amplificar una figura, dibujada una parte de ésta. Se observó que todos los estudiantes pudieron completar correctamente la parte de abajo del barco, pero no amplificaron al triple (linealmente) las dos siguientes partes que lo componen. Les fue difícil trabajar con el operador natural (x3) a través del dibujo. La mayoría del grupo (24 de 29) no percibió que la parte que completaron era el triple de la figura original y cayeron en el error de duplicar en lugar de triplicar linealmente los dos componentes restantes del barco.

En esta actividad no se les dijo de manera explícita que dibujaran la figura dada triplicando cada una de sus dimensiones, porque una de las finalidades era ver qué tanto los estudiantes pueden determinar el patrón que les permita llegar con éxito a la solución. Así, en lugar de que en el texto apareciera la instrucción, ésta fue sustituida por una parte del dibujo del barco amplificado. Se observó que casi en su totalidad no se percataron que la parte dibujada correspondía al triple de las dimensiones del barco, por lo que se puede decir que no han identificado al factor escalar 3.

Las respuestas se pueden clasificar en cuatro grupos: 1) Todos lograron completar la parte ya dibujada, con lo que se puede observar que estaba presente la propiedad del cierre y se observa, con respecto a la actividad anterior, que les resulta más fácil completar algo que dibujar sin tener una parte de la figura. 2) Algunos, 13 de 29 alumnos, duplicaron las dimensiones, tanto largo como ancho de las dos partes restantes del barco. Al respecto se puede decir que sólo se fijaron en una parte del texto que dice "completa esa ampliación...". 3) Algunos sólo ampliaron al triple el largo de una de las partes que componen al barco, no fijándose en el ancho. 4) Únicamente 5 de 29 se dieron cuenta que en todas sus dimensiones lineales el barco debería de ampliarse al triple, para lo cual multiplicaron por tres el número de cuadritos en cada dimensión. Estos niños mostraron tener la idea de proporción en cuanto al dibujo a escala se refiere.

**Análisis de la actividad 5.** La mitad del grupo realizó correctamente esta actividad, en su mayoría se fijaron en la parte dibujada y completaron, pero también observaron que la parte hecha del camioncito correspondía a la mitad de cuadritos tanto de largo como de ancho con respecto al original, lo cual se afirma por las explicaciones, que por escrito, dieron los alumnos. Como por ejemplo: Alumno 1: *"Conté los cuadritos y en la base trasera hay 6, en la base delantera hay 2 y de alto tiene 4. Lo que me dan dibujado es de base 3 y de alto 2, es la mitad, entonces hay la mitad de cuadritos tanto de base como de alto, por lo que me falta dibujar la parte delantera y la mitad de dos es uno. Las llantas tienen de diámetro dos lados de cuadritos, entonces las llantas del camión reducido deben tener de diámetro uno.*

Alumno 2: *"Yo conté abajo del camión 6 y 2 y de altura 4. Conté en lo que me dan 3 y de altura 2. Entonces le pongo el techo y la otra altura y me da el rectángulo del camión reducido y esa es mitad. Para la parte delantera del camión como debe ser la mitad y veo que tiene 2 entonces es uno la mitad".*

Al parecer los estudiantes estaban más familiarizados para trabajar, ya sea duplicando u obteniendo a la mitad, con algunos números como lo son el 4 y el 6, porque en este caso se percataron que la parte dibujada del camión correspondía a la mitad de 4 cuadritos, en cuanto a su ancho y a la mitad de 6 cuadros en su largo. También se observó esta forma de proceder en la actividad 3, en donde la mayoría duplicó el ancho del chaleco, que correspondía a cuatro cuadritos. En la actividad 5, tanto la cuadrícula como la parte ya dibujada, fueron medios que les ayudaron a los estudiantes a resolverla con éxito.

**Análisis de la actividad 6.** En ambas partes de la actividad, el valor conocido de los rectángulos que se pedían fueran proporcionales, correspondía al ancho. En el caso de la primera parte medía la tercera parte del ancho del otro rectángulo. La resolución de este problema tuvo un alto grado de dificultad para los alumnos, ya que sólo 7 de 29 estudiantes llegaron a una respuesta correcta. Ellos compararon los valores de los largos de los rectángulos y se dieron cuenta que una de esas medidas cabía 3 veces en la otra, algunos escribieron: *"el 3 cabe 3 veces en el 9"*, debían encontrar un número que cupiera tres veces en el 6, que es la medida del largo. Todos los alumnos hicieron operaciones, pero los 22 niños, cuyo resultado fue erróneo, se debió a que establecieron una relación inadecuada, ya que la mayoría consideró que el largo debía ser la mitad del valor del ancho del rectángulo.

En la segunda parte más estudiantes tuvieron éxito para resolverla, pues de igual forma conocían los valores de los anchos y se pedía encontrar el largo del rectángulo proporcional. Los 11 alumnos de los 29 que integran el grupo, encontraron la relación entre el largo y el ancho del primer rectángulo, al darse cuenta que 6 es la mitad de 12, de esta manera buscaron el número que correspondía a la mitad de 5, es decir a la mitad de la medida del ancho del otro rectángulo. Pero los 18 alumnos restantes, siguieron un procedimiento que los condujo a tener errónea la actividad. En su mayoría lo que hicieron fue dividir el valor del largo del rectángulo (6) entre 2, obteniendo un resultado incorrecto. Al preguntarles sobre el por qué de esta operación, comentaron que debían sacar la mitad de 6 porque éste es la mitad de 12. Se observa que iban por buen camino al detectar que el largo constituye la mitad del ancho en un rectángulo, pero después se perdieron ya que no pudieron establecer la relación correcta.

Los niños establecían relaciones, por lo que de un modo empírico estaban trabajando con razones, aunque desconocían el término y su significado. Gran parte de lo que hicieron fue emplear los operadores multiplicativos directos e inversos, aunque también ellos desconocían que estaban trabajando con éstos.

**Análisis de la actividad 7.** Los alumnos que llegaron a responder correctamente a las preguntas solicitadas, en su mayoría fue después de completar la tabla, en sus explicaciones comentaron que se basaron en los datos de la tabla para contestarlas, es decir, viendo ambas columnas y de manera implícita estableciendo relaciones entre ambas. Por ejemplo, al platicar con ellos decían, *"para dos barras de chocolate se requiere de un litro de leche; entonces, para 4 barras se empleará el doble, o sea 2 litros de leche o lo que es lo mismo, 2 litros de leche requieren de 4 barras de chocolate"*.

Quienes dieron valores incorrectos a las cuestiones pedidas fue por distintas razones. Una de ellas porque no relacionaron la tabla con las preguntas, mostraron confusión en la interpretación del texto, ya que en dos momentos se les pedía responder en función de las barras de chocolate que se necesitaban y en un tercer momento en función de los litros de leche. Las respuestas que dieron fueron todas para obtener la cantidad de barras de chocolate, de esta forma la tercera pregunta fue contestada no en términos de los litros de leche, como se pedía, resultando incorrecta la respuesta dada. Ningún estudiante empleó la regla de tres.

**Análisis de la actividad 8.** En esta tarea se pretendía que el estudiante determinara el precio de dos botes de pintura, uno de 1 litro y el otro de 4 litros, se les daba el precio de un bote de 20 litros. Sólo 8 de 29 estudiantes llegaron a la respuesta correcta, utilizando



estrategias distintas, la mayoría empleó el camino de encontrar el valor unitario al dividir $300 entre 20 litros y, una vez conocido el costo de un litro, a través de la multiplicación, determinaron el precio de 4 litros. Otros se dieron cuenta que 4 litros es la quinta parte de 20 litros, por lo que procedieron a dividir el precio de $300 entre 5 para saber el costo del bote de cuatro litros.

El error común detectado fue dividir los 300 pesos entre 4 litros, es decir, estos alumnos establecieron una relación errónea.

En esta actividad una parte de la información es dada a través del texto y la otra por medio del dibujo. Se pudo observar que esto les ayudó a los estudiantes para resolver el problema, pues comentaron que viendo el dibujo del bote de un litro se les ocurrió primero sacar su precio, para luego obtener el de 4 litros.

**Análisis de la actividad 9.** Diecinueve de veintinueve estudiantes llegaron a una respuesta correcta. Todos emplearon la estrategia de determinar el valor unitario y algunos sumaron la cantidad obtenida tantas veces como bolsas había, mientras que otros emplearon la multiplicación. En esta actividad el dibujo jugó una parte importante en su resolución, ya que el conteo de las bolsas les facilitó obtener el costo del total pedido una vez encontrado el precio de una bolsa; inclusive, el dibujo fue un apoyo para el uso de la estrategia referente a la obtención del valor unitario pues debajo de cada figura que representaba la bolsa de dulces colocaron su costo.

En este problema tampoco usaron la regla de tres, una explicación posible es que la maestra del grupo no haya considerado importante enseñar la regla de tres.

**Análisis de la actividad 10.** En esta ocasión no se les dio a los alumnos el dato correspondiente al valor unitario, como se hizo con la actividad 7, pese a ello, dentro de las estrategias empleadas para el llenado de la tabla se encontró que varios alumnos primeramente determinaron el valor unitario y después procedieron a encontrar los valores restantes. Es decir, leyeron de la tabla donde 3 paquetes de estampas contienen 15 estampas, efectuaron la división 15/3 y se percataron que un paquete tiene 5 estampas, con ello encontraron el valor de un paquete y les fue fácil determinar los siguientes valores que les solicitaban en la tabla. Otros niños procedieron a completar la tabla empleando múltiplos de 5 o la tabla de multiplicar del cinco y los restantes emplearon la suma repetida del valor cinco.

Es importante mencionar que la mayoría de los estudiantes no emplearon la información de la tabla con los datos referidos a paquetes de estampas y cantidad de estampas para formular el problema que se les solicitaba, más bien usaron las cantidades de la tabla en contextos distintos al dado.

Al reflexionar sobre este aspecto consideramos que los alumnos se pueden desenvolver en contextos distintos con los mismos datos. Eso señala que si cambiamos el contexto no les afecta dado que pueden identificar el valor unitario para llenar una tabla o emplear una tabla de multiplicar para completar, etc. Como lo establece la *Matemática en el Contexto de las Ciencias*, la diversidad de contextos es uno de los factores que permiten al estudiante realizar la transferencia del conocimiento matemático a las demás áreas que las requieren.

## Conclusiones

De lo expuesto se puede concluir que no se ha explotado al máximo el pensamiento cualitativo de los estudiantes en torno a la proporcionalidad, lo cual se observa cuando manifiestan centración en una de las dimensiones de las figuras que se les pedía reducir o amplificar. El visualizar en su conjunto un dibujo, y no fijarse en cada una de las partes de él, para poder seleccionar la reducción del original, muestran la necesidad de trabajar más el aspecto cualitativo de la proporcionalidad, por lo que es considerado como un aspecto que demanda el estudiante para ser trabajado en el Programa de Enseñanza.

En algunos estudiantes, lo cualitativo está planteado escasamente como antesala de lo cuantitativo, ya que dentro de las categorías lingüísticas detectadas en ellos, están las siguientes: *"es más grande que...", es más pequeño que...",* lo cual refleja una cierta comprensión de la proporción, pero en estos mismos alumnos no se encontraron otras categorías a través de las cuales mostraran un mayor entendimiento de la idea de proporción.

Se reconoció la familiaridad que muchos alumnos tuvieron con el dibujo a escala, cuando una parte del dibujo ya está construida, por lo que hay un predominio de la "ley del cierre" que prevalece en ellos.

Una de las dificultades detectadas es el no reconocimiento de operadores multiplicativos como (x3) 0 (x1/3) en este tipo de actividades.

Se observa la facilidad que tienen los niños para llenar una tabla, a través de sumar determinada cantidad de veces un mismo número o haciendo uso de la multiplicación, una vez encontrado el operador escalar correspondiente. El problema detectado en el empleo de la tabla fue que los alumnos no extrajeron los datos de ella al dar respuesta a la situación planteada.

También se observa que no hay manifestación, por parte de los alumnos, en cuanto al uso de los diferentes modos de representación como la tabla, el dibujo y lo numérico; al resolver problemas clasificados como "problemas de valor perdido", pues varias actividades entraron en esta categoría, aunque las situaciones eran diferentes y sólo una de ellas fue resuelta correctamente por la mayoría del grupo.

Con base en lo anterior, se puede decir que gran parte de los estudiantes no tienen un fuerte desarrollo de su pensamiento proporcional cualitativo, y esto hace que los alumnos trabajen de manera deficiente en lo cuantitativo al emplear operaciones y algoritmos carentes de sentido para ellos. La mayoría no le ha dado sentido al uso de las operaciones, es decir, no sabe en qué momento emplear la multiplicación por un número natural o la división.

En conclusión, los estudiantes tienen potencial para poder desarrollar su pensamiento proporcional cualitativo lo que los ayudará a adquirir ese sentido del uso de operaciones en el terreno cuantitativo.

Algo importante de mencionar es el uso de diversos contextos, los cuales ayudaron para que los alumnos se desenvolvieran de forma natural y expresaran las dificultades mostradas en la presente investigación.

A continuación se muestran tres tablas (2, 3, 4) en donde se aprecia qué tanto fueron desarrollados el pensamiento proporcional cualitativo, el tránsito del cualitativo al cuantitativo y el pensamiento proporcional cuantitativo a través de la identificación de los indicadores establecidos y observados en el abordaje de las actividades propuestas.

En la tabla 5 se concentran los resultados obtenidos de las tablas 1.2, 1.3 y 1.4, lo que permite mostrar un análisis en relación al nivel de desarrollo de los pensamientos proporcionales acordes a los indicadores que lograron ser propiciados por las actividades.

Se emplean tres niveles para designar el desarrollo, que son: alto, medio y bajo. El nivel alto se determina de acuerdo a si la actividad propició el desarrollo de más de la mitad de los indicadores que se establecieron en el pensamiento proporcional. El nivel medio significa que la actividad propició el desarrollo de la mitad de los indicadores y el nivel bajo contempla menos de la mitad de los indicadores.



**Tabla 2. Relación entre actividades e indicadores que propiciaron el desarrollo del pensamiento proporcional cualitativo**

| Indicador | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6/1 | A6/2 | A7 | A8 | A9 | A10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Los estudiantes se apoyaron en su experiencia | X | X | X | | X | X | X | X | X | X | X |
| Usaron expresiones lingüísticas para crear categorías de comparación | X | X | | | | | | | | | |
| Se apoyaron en los sentidos, en particular en lo visual | X | X | | | | | | | | | |
| Acciones que no proporcionaron ni demandaron cantidades | X | X | X | X | X | | | | | | |

**Tabla 3. Relación entre actividades e indicadores que propiciaron el tránsito del pensamiento proporcional cualitativo al cuantitativo**

| Indicador | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6/1 | A6/2 | A7 | A8 | A9 | A10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Emplearon la idea de orden | | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Usaron el conteo | | | X | X | X | | | X | X | X | X |
| Emplearon la medición indirecta | | X | X | X | X | | | | | | |
| Emplearon la medición directa | | | | | | X | X | | | | |

**Tabla 4. Relación entre actividades e indicadores que propiciaron el desarrollo del pensamiento proporcional cuantitativo**

| Indicador | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6/1 | A6/2 | A7 | A8 | A9 | A10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Los estudiantes usaron cantidades | | | | | | X | X | X | X | X | X |
| Usaron el operador multiplicativo | | | | | | | | X | | X | X |
| Comparación de magnitudes mediante un cociente | | | | | | X | X | X | X | X | X |
| Emplearon el algoritmo de la regla de tres | | | | | | | | | | X | |

**Tabla 5. Nivel de desarrollo de los pensamientos proporcionales**

| PENSAMIENTO | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6/a | A6/b | A7 | A8 | A9 | A10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Desarrollo del pensamiento proporcional cualitativo | Alto | Alto | Medio | Bajo | Medio | Bajo | Bajo | Bajo | Bajo | Bajo | Bajo |
| Desarrollo del tránsito del pensamiento proporcional cualitativo al cuantitativo | Bajo | Alto | Alto | Alto | Alto | Bajo | Bajo | Medio | Medio | Medio | Medio |
| Desarrollo del pensamiento proporcional cuantitativo | Bajo | Bajo | Bajo | Bajo | Bajo | Medio | Medio | Alto | Medio | Alto | Alto |



**Referencias Bibliográficas**


- Camarena, G. P. (1984) "El currículo de las matemáticas en ingeniería. Memorias de las Mesas Redondas sobre Definición de Líneas de Investigación", en el IPN, México, pp. 21-25.
- Camarena, G. P. (1995) La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. Memorias del XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.
- Camarena, G. P. (2005) Reporte de investigación titulado: La matemática en el contexto de las ciencias: las competencias profesionales. Editorial ESIME-IPN, México, pp. 3-21.
- Freudenthal, H. (1983) Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Holland Dordrechet: D. Reidel Publishing Company. 28-33, 178-209.
- Hart, K. (1988) "Ratio and proportion". En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.). Concepts and operations in the Middle Grades, 2. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. 198-219.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1978) "Las operaciones intelectuales y su desarrollo", en Lecturas en Psicología del niño, I. (70-119). Madrid, Alianza Editorial.
- Piaget, J. (1978) Psicología del Niño. Madrid. Ediciones Morata, pp. 131-150.
- Ruiz, E. F., Ruiz, E. y Acosta, F. (1997a) Resolución de problemas a nivel primaria haciendo uso de la calculadora Math Explorer. Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. 245.
- Ruiz, E. F., Ruiz, E. y Acosta, F. (1997b) Taller de Resolución de problemas a nivel medio, haciendo uso de la calculadora Math Explorer Plus. Memoria del XVI Congreso Nacional de la Enseñanza de las Matemáticas. Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas. Escuela Normal Superior del Estado de México. 17-18.
- Ruiz, E. F. (1997 a) Uso de las calculadoras Math Explorer y TI-92 en la Resolución de Problemas: Una experiencia con profesores de los niveles básico y medio. Memorias del Seminario Nacional de Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática. 25-35.
- Ruiz, E. F. (2000 b) Study Of Solving Strategies And Proposal For The Teaching Of Ratio And Proportion. Proceedings Of The Twenty-Second Annual Meeting North American Chapter Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education, 2, 395-396.
- Streefland, L. (1984a) Search for the roots of ratio: Some through on the long term learning process. Part I. Educational Studies in Mathematics, 15-3. 327-348.
- Streefland, L. (1984b) Search for the roots of ratio: Some through on the long term learning process. Part II. Educational Studies in Mathematics, 16-1. 75-94.